

УДК 519.624.1

Решение краевых задач при исследовании динамики движения летательного аппарата в вертикальной плоскости

*Кирилюк Е. В., студентка
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Динамика и управление полётом ракет и космических аппаратов»*

*Научный руководитель: Степанов М.Н., к.т.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
kafsm3@bmstu.ru*

Введение

При создании ракетного комплекса и, в частности, самого управляемого снаряда (летательного аппарата) большую роль играет решение задач динамики полёта, основными из которых являются задачи определения возможных траекторий движения летательного аппарата (ЛА) и задачи определения возможности осуществления полёта по той или иной траектории.

Целью данной работы является разработка алгоритмов решения краевых задач определения управления, обеспечивающего выполнение заданных граничных условий, при полёте ЛА в вертикальной плоскости для проведения начальных проектно-баллистических расчётов.

Основной сложностью, возникающей при решении краевых задач в баллистике, является то, что аналитический вид функций, отражающих зависимости между параметрами управления и параметрами движения ЛА, на которые накладываются граничные условия, как правило, не известен. Таким образом, для решения необходимо применение численных методов.

Подход к решению любой краевой задачи всегда существенно зависит от специфики рассматриваемой модели движения. Сведение задачи к формальному математическому алгоритму без введения определённых ограничений и тщательного подбора вариативных элементов, входящих в него, может привести к результатам, не имеющим физического смысла. Поэтому выбор того или иного численного метода осуществляется после проведения предварительного изучения особенностей движения проектируемого ЛА.

1. Постановка краевой задачи.

В данной работе моделируется полет осесимметричного ЛА класса «воздух-воздух» в вертикальной плоскости при действии нормальной перегрузки. Траектория ЛА имеет два участка: активный и пассивный; старт осуществляется горизонтально ($\theta_c=0$).

Для предварительного изучения динамики движения ЛА в вертикальной плоскости и его маневренных свойств строится «зона действия» ЛА [6] путем расчета семейства траекторий, соответствующих различным значениям постоянной нормальной перегрузки (n_{Ya}), при этом за располагаемую перегрузку принимается $n_{Ya} = 15$. Время полёта на пассивном участке определяется из условия минимальной допустимой скорости встречи с целью $V_{\min} = 1,5a_{zv}$, где a_{zv} – скорость звука, соответствующая текущей высоте полета ЛА.

Границей зоны действия является огибающая семейства траекторий ЛА, которая определяется совокупностью следующих факторов: величиной располагаемой перегрузки n_{Ya} , величиной минимальной допустимой скорости встречи с целью и (в зависимости от начальной высоты полёта) участками, ограниченными радиусами кривизны, соответствующими требуемым перегрузкам n_{Ya} . В работе используется стартовая система координат $Ox_c y_c z_c$; направление земной оси Ox_c совпадает с начальным направлением полета.

Для заданных условий имеем:

$$\dot{\Psi} = \Psi = \gamma_a = \beta = z_c = n_{Z_a} = 0, \quad y_c(0) = y_{c0}, \quad V(0) = V_0, \quad \theta_c(0) = \theta_{c0} = 0.$$

При моделировании принимаются следующие допущения:

- $h, x_c, y_c, z_c \ll R$ - т.е. кривизна Земли в рамках рассматриваемой задачи не учитывается;
- угол атаки мал: $\cos \alpha \approx 1, \sin \alpha \approx \alpha$;
- гравитационное поле Земли однородное $g \approx g_0 = 9,80665 \text{ м/с}^2$;
- двигатель ракетный;
- управляющие силы являются частью аэродинамических сил;
- система управления считается идеальной;
- атмосфера соответствует ГОСТ 4401-81.

Расчёт элементов траекторий производится методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Движение ЛА в вертикальной плоскости с учётом принятых допущений описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{1}{m}(P - Q - mg \sin \theta_c), \\ \dot{\theta}_c = \frac{g}{V}(n_{Y_a} - \cos \theta_c), \\ \dot{x}_c = V \cos \theta_c, \\ \dot{y}_c = V \sin \theta_c, \\ \dot{m} = -m_{cek}, \end{cases}$$

где $P = P_0 + S_a(p_{0N} - p(h))$, $Q = C_{Xa} \frac{\rho V^2}{2} S_m$, $n_{Y_a} = \frac{P\alpha + Y_a}{mg}$,

$$\alpha = \frac{n_{Y_a}}{n_{Y_a}^\alpha}, \quad Y_a = C_{Y_a}^\alpha \frac{\rho V^2}{2} S_m \alpha, \quad n_{Y_a}^\alpha = \frac{P + C_{Y_a}^\alpha \frac{\rho V^2}{2} S_m}{mg},$$

$$M = \frac{V}{a_{36}} - \text{число Маха};$$

$$a_{36} = 20,046796\sqrt{T} - \text{скорость звука.}$$

В данной работе решение краевых задач производится с использованием метода Ньютона с применением аппроксимации частных производных конечными разностями первого порядка, в большинстве источников называемого методом секущих. Подробное описание метода представлено в [2], [3]. В дальнейшем будем называть его методом Ньютона. Также в работе применяется модификация данного метода, заключающаяся в дополнении его одномерной оптимизацией посредством параболической интерполяции [2] (описание см. в разделе 3).

Решение краевой задачи состоит в определении такого сочетания значений управляющих параметров, при котором реализуется траектория, удовлетворяющая граничным условиям $x(t_k) = x_k$; $y(t_k) = y_k$; $V(t_k) = V_k$ с заданными точностями ε_x , ε_y , ε_V соответственно.

2. Выбор параметра останова при решении краевой задачи.

Выбор параметра останова оказывает существенное влияние на сходимость решаемой краевой задачи. Это обусловлено физическими особенностями изменения параметров движения ЛА. Сходимость задачи в разных диапазонах задаваемых граничных условий проиллюстрируем на следующих примерах: в качестве базовых граничных условий назовем точки A_m , ($m=1,2,\dots$), лежащие на заранее рассчитанных траекториях с

базовыми значениями нормальной перегрузки $n_{Y_a}^6$. Зададим шаг выбора точек A_m , параметры движения в которых послужат граничными условиями для краевой задачи. В рассматриваемой модели в широком диапазоне по траектории меняется угол наклона вектора скорости к горизонту, и процессы изменения прочих параметров траектории удобно рассматривать в функции от его значения, следовательно, в качестве критерия определения характерных областей граничных условий выберем угол наклона траектории. Дискретность изменения угла назначим равной приблизительно 10 град. Не нарушая общности, величины перегрузок $n_{Y_a}^6$ для «базовых» траекторий выберем равными 6, 10 и 12 единицам. Результаты решения одномерной краевой задачи классическим методом Ньютона для данной выборки граничных условий представлены в табл. 1-3 соответственно. Управляющим параметром является нормальная перегрузка n_{Y_a} , в качестве начального приближения которой принимались величины $n_{Y_a}^0$. При решении краевой задачи точность по параметру останова задаётся равной $\varepsilon_1 = 10^{-4}$, по граничному условию - $\varepsilon = 10^{-3}$.

Таблица 1

Результаты решения однопараметрической краевой задачи для выборки граничных условий $\{A_m, (m=1,2,\dots,13)\} \equiv \{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_{13}, y_{13}\}$ из траектории, полученной при $n_{Y_a}^6 = 6$

m	θ_{cm} , град	X_m , М	Y_m , М	$n_{Y_a}^0$	n_{Y_a}	Кол-во итераций	Параметр останова
1	30,134293	10798,187	11084,931	4,5	5,99999893	9	х
2	40,067058	12682,324	12399,991	4,5	6,00000069	15	х
3	50,414812	14054,239	13775,474	4,5	6,00000079	34	х
4	60,087510	14926,517	15026,994	4,5	6,00000079	7	у
5	70,188564	15504,128	16266,412	4,5	6,00000031	9	у
6	80,144991	15805,628	17395,855	4,5	6,00000042	8	у
7	90,380290	15894,495	18443,352	7,5	6,00000087	4	у
8	100,206385	15813,817	19330,503	7,5	6,00000028	7	у
9	110,098760	15606,146	20102,285	7,5	6,00000049	8	у
10	120,695396	15278,836	20794,726	7,5	6,00000028	9	у
11	130,471203	14907,965	21314,515	7,5	6,00000007	9	у
12	140,796512	14467,684	21746,278	7,5	6,00000025	24	у
13	150,795216	14011,736	22056,889	7,5	6,00000029	21	у

Таблица 2

Результаты решения однопараметрической краевой задачи для выборки граничных условий $\{A_m, (m=1,2,\dots,37)\} \equiv \{x_1,y_1;x_2,y_2;\dots;x_{37},y_{37}\}$ из траектории, полученной при

$$n_{Y_a}^{\bar{0}} = 10$$

m	θ_{cm} , град	X_m , М	Y_m , М	$n_{Y_a m}^0$	n_{Y_a}	кол-во итераций	параметр останова
1	2	3	4	5	6	7	8
1	30,017932	6604,620	10278,290	8,0	10,00000162	11	x
2	40,179849	8268,535	11440,629	8,0	10,00000313	16	x
3	50,211986	9458,969	12633,813	8,0	10,00000096	45	x
4	60,471398	10309,518	13858,785	8,0	9,99999879	61	y
5	70,177169	10831,906	14991,052	8,0	10,00000002	21	y
6	80,524165	11134,638	16141,418	8,0	10,00000001	11	y
7	90,038185	11217,252	17126,801	8,0	-	-	x/y
8	100,085906	11134,500	18075,458	8,0	9,99999960	8	y
9	110,692803	10892,186	18960,625	8,0	9,99999951	10	y
10	120,119793	10570,547	19639,599	8,0	10,00000049	15	y
11	130,883558	10110,149	20286,699	8,0	9,99999876	12	y
12	140,233164	9651,351	20737,403	8,0	9,99999966	13	y
13	150,900001	9083,534	21127,498	8,0	9,99999928	11	y
14	160,918591	8525,743	21377,403	8,0	9,99999989	7	y
15	170,168385	8003,826	21512,261	8,0	10,00000009	20	y
16	180,663746	7417,890	21559,580	8,0	8,44305718	5	y
				9,0	9,99999931	15	x
17	190,262128	6899,526	21510,201	8,0	9,17484101	7	y
				9,5	9,99999301	64	x
18	199,958486	6403,235	21376,341	8,0	9,99994737	64	y
19	210,789066	5892,913	21134,434	8,0	11,05577233	80	y
				9,6	9,99999506	81	x
20	220,535737	5483,223	20840,484	8,0	10,00000054	40	y
21	230,235608	5131,007	20483,468	8,0	9,99999921	37	y
22	240,911822	4817,201	20025,472	8,0	9,99999893	24	y
23	250,395996	4611,549	19570,758	8,0	9,99999957	10	y
24	260,770728	4473,691	19033,897	8,5	9,99999946	30	y
25	270,962081	4433,873	18480,775	8,5	10,00000008	8	y
26	280,968120	4491,702	17928,804	8,0	9,99999933	20	y
27	290,798136	4643,799	17394,764	8,0	10,00000067	10	y
28	300,472649	4884,017	16894,428	12,0	9,99999974	12	y
29	310,020229	5203,743	16442,083	11,0	9,99973556	6	x
30	320,417495	5634,403	16014,737	11,0	9,99999942	7	x
31	330,757902	6131,433	15674,192	11,0	9,99999897	10	x
32	340,161560	6624,988	15448,734	11,0	9,99999938	11	x
33	350,573067	7194,930	15299,695	9,0	9,99999903	11	x
34	360,161085	7720,266	15256,883	11,0	11,17896854	13	x
				9,6	10,00000256	28	
35	370,920234	8285,940	15311,336	11,0	10,00019916	76	x
36	380,969506	8771,435	15449,633	11,0	9,99999633	16	x
37	390,299198	9171,359	15641,157	10,8	9,71705912	12	x
				10,5	10,00000203	10	

Таблица 3

Результаты решения однопараметрической краевой задачи для выборки граничных условий $\{A_m, (m=1,2,\dots,37)\} \equiv \{x_1,y_1;x_2,y_2;\dots;x_{37},y_{37}\}$ из траектории, полученной при

$$n_{Y_a}^{\bar{6}} = 12$$

m	θ_{cm} , град	X_m , М	Y_m , М	$n_{Y_a,m}^0$	n_{Y_a}	кол-во итераций	параметр останова
1	2	3	4	5	6	7	8
1	30,421547	5431,034	10028,884	9,0	12,00000126	10	x
2	40,330435	6927,254	11085,661	9,0	11,99999661	17	x
3	50,481437	8052,746	12222,271	9,0	12,00000017	52	x
4	60,023917	8805,708	13303,980	9,0	11,99999763	65	y
5	70,192819	9334,812	14439,397	9,0	11,99999850	24	y
6	80,212468	9620,316	15513,926	9,0	12,00000172	18	y
7	90,809500	9705,386	16577,419		-	-	x/y
8	100,243374	9622,462	17444,283	9,0	11,99999908	7	y
9	110,120586	9402,596	18258,116	9,0	12,00000034	9	y
10	120,452628	9054,610	18996,911	9,0	11,99999948	11	y
11	130,244604	8638,091	19585,304	9,0	12,00000146	29	y
12	140,413347	8139,732	20078,899	9,0	12,00000093	19	y
13	150,945930	7575,803	20464,626	14,0	11,99999998	7	y
14	160,714185	7027,792	20711,016	9,0	12,00000059	8	y
15	170,728822	6457,462	20856,542	11,0	11,99999915	37	x
16	180,955510	5881,389	20898,735	11,0	11,99999935	8	x
17	190,190177	5378,299	20849,831	10,0	10,24304560	6	y
				11,0	11,99999717	17	x
18	200,698389	4837,847	20700,724	10,0	11,29426304	7	y
				12,5	12,00000563	31	x
19	210,105564	4392,776	20489,479	10,0	12,36311903	148	y
				11,5	11,99999756	98	x
20	220,717014	3945,451	20171,550	10,0	11,99999723	31	y
21	230,137104	3605,545	19826,568	14,0	11,99972782	18	y
22	240,682002	3298,075	19380,679	14,0	11,99999962	16	y
23	249,981654	3097,935	18944,824	14,0	11,99999887	19	y
24	260,340707	2960,291	18425,028	14,0	11,99999944	11	y
25	270,578424	2917,917	17890,448	11,0	12,00000000	4	y
26	280,690639	2970,519	17358,071	14,0	12,00000030	7	y
27	290,683426	3114,845	16844,405	14,0	11,99999953	10	y
28	300,573175	3344,852	16365,043	14,0	12,00000140	11	y
29	310,383920	3651,970	15934,153	14,0	11,99999912	15	y
30	320,146000	4025,418	15564,099	14,0	12,00000076	18	y
31	329,895908	4452,528	15265,172	14,0	11,99999993	14	y
32	340,766992	4972,684	15026,074	11,0	12,00220598	11	x
33	350,637756	5464,954	14900,422	11,0	11,99999701	10	x
34	360,646072	5963,275	14862,194	13,0	13,90001759	15	x
				12,5	12,00000458	16	x
35	370,850889	6451,080	14910,985	13,0	12,43514885	32	x
				12,4	12,00000710	36	x
36	380,139765	6862,478	15024,764	13,0	12,00000600	23	x
37	390,901746	7285,645	15226,298	13,0	12,00000198	13	x

По данным, представленным в табл. 1-3, можно сделать вывод, что даже в случае одномерной краевой задачи в рассматриваемой постановке нельзя использовать один и тот же параметр останова во всех областях граничных условий. Хорошая сходимость задачи при параметре останова x наблюдается в областях $\theta_c \in [30^\circ; 50^\circ]$, $[170^\circ; 230^\circ]$ и $\theta_c \in [300^\circ; 390^\circ]$, при параметре останова y – в областях $\theta_c \in [60^\circ; 170^\circ]$, $[230^\circ; 300^\circ]$.

Одним из основных критериев, характеризующих сходимость при выборе определенного параметра останова, является соотношение между «реакциями» невязок параметров поиска на изменение управляющего параметра. Т.е., фактически, выбор параметра останова будет зависеть от соотношения между частными производными $\left(\frac{\partial \Delta y}{\partial n_{ya}}\right)_{x=x_k}$ и $\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial n_{ya}}\right)_{y=y_k}$ (см. иллюстрации на рис.1а, 1б), которые являются составляющими так называемой матрицы влияния, построение которой производится на основе методов теории чувствительности [4].

Для сравнительно пологих участков траектории имеем:

$$\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial n_{ya}}\right)_{y=y_k} > \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial n_{ya}}\right)_{x=x_k}$$

(что и наблюдается в областях $\theta_c \in [0^\circ; 50^\circ]$, $[170^\circ; 230^\circ]$, $[300^\circ; 390^\circ]$); для крутых участков – обратно:

$$\left(\frac{\partial \Delta y}{\partial n_{ya}}\right)_{x=x_k} > \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial n_{ya}}\right)_{y=y_k} \cdot \cdot$$

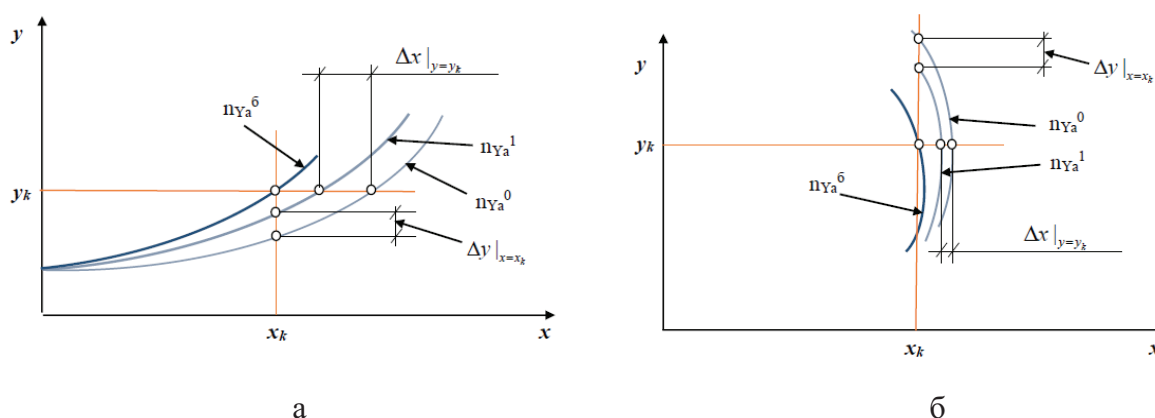


Рис. 1. Графические иллюстрации для соотношений между частными производными в случае: а – «пологого» участка траектории, б – «крутого» участка траектории. Введены следующие обозначения: n_{Ya}^0 – траектория, полученная при начальном приближении для перегрузки, n_{Ya}^1 – траектория, соответствующая следующему приближению для перегрузки, n_{Ya}^6 – траектория, соответствующая искомому

Данный критерий является не единственным, оказывающим влияние на «работоспособность» того или иного параметра останова, но он помогает предварительно сориентироваться – в каких областях сходимость задачи более вероятна при использовании останова по той или иной координате.

Наиболее трудным представляется нахождение решения для граничных условий, которым соответствуют точки траектории A_m , в которых угол ее наклона к стартовому горизонту θ_c близок к 90, 180, 270 и 360 град. Это связано с тем, что данные точки находятся в окрестностях обнуления производных от координат x и y . Параметром останова для данных вариантов граничных условий следует принимать координату, производная от которой в окрестности граничной точки не обнуляется, т.е.: для точек, угол θ_c в которых близок к 180 и 360 град. – координату x , для точек, угол θ_c в которых близок к 90 и 270 – наоборот, координату y .

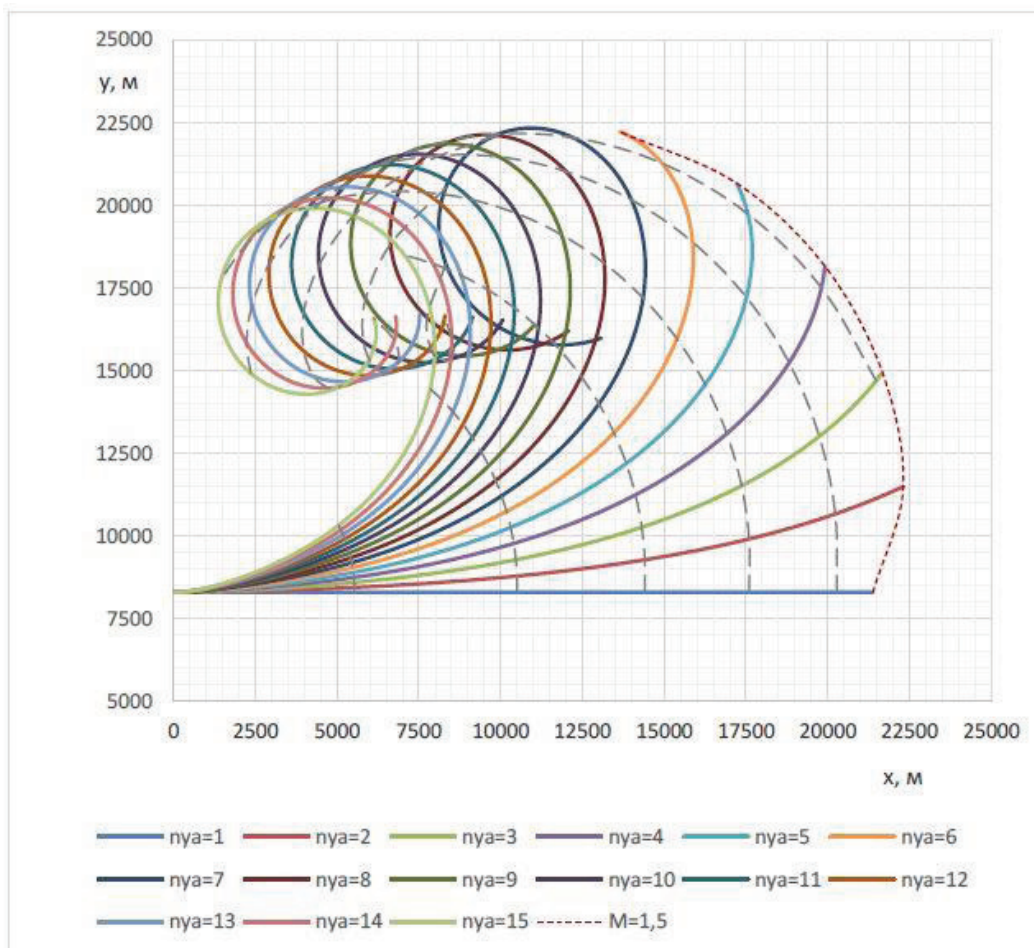


Рис. 2. Зона действия ЛА в случае стартовой высоты $y_0=8300$ м

В рассматриваемой задаче «особым» является также диапазон $\theta_c \in [180^\circ; 210^\circ]$, в котором краевая задача приобретает неоднозначное решение. Это объясняется спецификой рассматриваемой модели и большой «кучностью» траекторий, образующих в

Молодежный научно-технический вестник ФС77-51038, ISSN 2307-0609

данном диапазоне верхнюю границу «зоны действия» рассматриваемого ЛА (см. рис. 2). Для начальных высот, превышающих 6000 м, и значений нормальной перегрузки n_{ya} , превышающих 10 единиц, в диапазоне $\theta_c \in [360^\circ; 380^\circ]$ возникает ещё одна граница «зоны действия» - нижняя, где также присутствует неоднозначность решения, заключающаяся в пересечении траекторий, соответствующих разным значениям управляющих параметров. В табл. 2 и табл. 3 подобные случаи существования решения, отличного от искомого, выделены полужирным шрифтом. В указанных точках (например, точки 34 и 35 в табл. 3) используемый алгоритм решения краевых задач приводил к траекториям, соответствующим значениям управляющего параметра близким к искомым, что вполне объяснимо, исходя из физической картины движения (см. рис. 2). Для этих точек приводятся два решения, полученных при различных начальных приближениях для управляющих параметров.

Одним из способов улучшения сходимости решения является переход к полярной системе координат. В качестве параметра останова в таком случае назначается не координата точки, а модуль её радиус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ или же полярный угол $\varphi = \arctg(y/x)$. Тогда останов осуществляется при выполнении условия $|r - r_k| < \varepsilon$ или $|\varphi - \varphi_k| < \varepsilon$ соответственно, где $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$, $\varphi_k = \arctg(y_k/x_k)$, а ε – наперёд заданная малая величина, определяющая точность решения по граничному условию.

Возможно использование «комбинированного» поиска: когда минимизируемым параметром по-прежнему остаётся невязка по одной из декартовых координат, которая может выбираться в соответствии с описанными выше рекомендациями, а параметром останова служит модуль радиус-вектора.

Останов по радиусу помогает снизить риск того, что краевая задача начнёт стремиться к решению, для которого выполняется лишь одно граничное условие (только $y = y_k$ или только $x = x_k$ в зависимости от выбора координаты, по которой производится останов). Также данный способ останова может облегчить нахождение решения краевой задачи при «критических» значениях угла $\theta_c - 90, 180, 270$ и 360 град, т.к. в этих точках, в отличие от производных от соответствующих декартовых координат, производная радиус-вектора не обнуляется. Но стоит отметить, что данный способ не является универсальным и не во всех случаях обеспечивает устойчивую сходимость решения.

Сделанные выводы можно обобщить на случай двухпараметрической краевой задачи, при использовании в качестве параметра останова одной из координат. Результаты решения двухпараметрической задачи, подтверждающие данное предположение, будут

представлены в разделе 3, после описания одномерного оптимизационного метода. Без его применения решение краевой задачи носит неустойчивый характер в достаточно широком диапазоне граничных условий и не представляется возможным проследить закономерность в выборе параметра останова.

3. Модификация метода Ньютона с помощью одномерной оптимизации с использованием параболической интерполяции.

Метод одномерной оптимизации, основанный на применении параболической интерполяции, который будет описан далее, был первоначально опробован на однопараметрической краевой задаче ($n=1$), где показал улучшение сходимости в наиболее сложных диапазонах граничных условий, отмеченных в предыдущем разделе. Далее представлено обобщение этого метода для применения его при решении многопараметрических задач.

Решение краевых задач, имеющих порядок $n>1$, связано с дополнительными трудностями, а именно: усугубляется проблема поиска удачного начального приближения для вектора управляющих параметров и возникает необходимость вычисления на каждой итерации матрицы частных производных – матрицы Якоби. Её поведение значительно влияет на сходимость задачи. Если форма некоторой поверхности, по которой осуществляется поиск решения, достаточно сложная и имеет множество локальных экстремумов, то велика вероятность того, что в некоторых точках в процессе итерационного решения методом Ньютона матрица Якоби станет вырожденной, при этом моделируемый вычислительный процесс будет прерван в связи с невозможностью вычисления обратной матрицы. Или же, при неудачном начальном приближении алгоритм перейдет на очередной итерации к неустойчивым скачкам между близкими локальными экстремумами, что негативно скажется на времени сходимости (увеличится количество итераций) или же вовсе приведёт к расхождению задачи. Таким образом, критичной является локализация решения.

Повысить надёжность работы метода можно с помощью введения в итерационную формулу коэффициента для матрицы Якоби $k<1$:

$$\bar{Y}^{i+1} = \bar{Y}^i + k^i J^{-1}(-\Delta \bar{F}^i),$$

где $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$ - матрица Якоби;

$\bar{Y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ - вектор-столбец управляющих параметров;

$\Delta \bar{F} = [\Delta f_1 \ \Delta f_2 \ \dots \ \Delta f_n]^T$ - вектор-столбец невязок граничных условий;

$y_j, j = 1, 2, \dots, n$ - значения управляющих параметров;

$f_j, j = 1, 2, \dots, n$ - граничные условия;

$\Delta f_j, j = 1, 2, \dots, n$ - значения невязок по граничным условиям;

i – номер итерации.

Введение коэффициента, отвечающего, фактически, за длину вектора градиента, уменьшает шаг итераций и, таким образом, обеспечивает более осторожную стратегию поиска решения и увеличивает вероятность сходимости. Однако введение слишком малого значения коэффициента может привести, при неудачном выборе начального приближения для управляющих параметров \bar{Y}^0 , к значительному увеличению количества итераций, а значит, и времени решения задачи.

В данной работе для улучшения сходимости задачи и уменьшения количества итераций в процессе решения предлагается задать функцию невязок, коэффициент k для которой будет аргументом, и производить оптимизацию значения k_{opt}^i на каждом шаге с помощью параболической интерполяции этой функции.

В качестве функции невязок примем $\Delta^i = \Delta^i(k^i)$, где $\Delta^i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\Delta f_j}{\varepsilon_{f_j}} \right)^2}$ –

среднеквадратичное приведенных невязок на текущем шаге, которое будем считать обобщённым показателем отличия текущего промежуточного решения от требуемого. В указанной формуле ε_{f_j} - малые величины, определяющие максимальную допустимую погрешность решения краевой задачи по каждому из граничных параметров.

Предположим, что зависимость $\Delta^i = \Delta^i(k^i)$ на каждом шаге можно аппроксимировать некоторой квадратичной функцией: $\Delta^i = a(k^i)^2 + a_2 k^i + a_3$. Тогда

коэффициенты a_1, a_2, a_3 однозначно определяются, если получить значения функции невязок в трёх точках. Для этого вводятся три базовых значения $k^i : k_1, k_2, k_3$. На каждой итерации подстановкой этих значений в итерационную формулу определяются три новых вектора управляющих параметров $\bar{Y}^{i+1}(k_1), \bar{Y}^{i+1}(k_2), \bar{Y}^{i+1}(k_3)$, затем для каждого из трёх полученных значений вычисляются значения невязок Δf_j и, соответственно, значение функции невязок. Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \Delta^i(k_1) = a_1 k_1^2 + a_2 k_1 + a_3, \\ \Delta^i(k_2) = a_1 k_2^2 + a_2 k_2 + a_3, \\ \Delta^i(k_3) = a_1 k_3^2 + a_2 k_3 + a_3. \end{cases}$$

Решая её одним из известных методов, получаем значения коэффициентов a_1, a_2, a_3 на текущей итерации. Теперь есть возможность рассчитать аргумент вершины параболы по простой формуле: $k_B^i = -\frac{a_2}{2a_1}$.

Дальнейшие действия зависят от соотношения коэффициентов, т.е. от геометрии полученной параболы. Возможны три случая:

- 1) $a_1 > 0, |k_B^i| < 1$;
- 2) $a_1 > 0, |k_B^i| > 1$;
- 3) $a_1 < 0$.

В случаях 1 и 2 в вершине параболы имеем минимум функции невязок, в третьем случае – максимум. В случае 1 в качестве оптимального значения коэффициента для вычисления нового приближения вектора управляющих параметров принимаем $k_{opt}^i = k_B^i$. В случае 2 принимаем k_{opt}^i равным единице или значению, близкому к ней, в зависимости от специфики задачи. В случае 3 принимаем $k_{opt}^i = \min\{k_1, k_2, k_3\}$.

В табл. 4 и 5 представлены поитерационно для одних и тех же граничных условий результаты решения краевой задачи классическим методом Ньютона и методом с применением алгоритма одномерной оптимизации соответственно. В качестве управляющих параметров выступают нормальная перегрузка n_{Ya} и время окончания работы двигателя t_{AUT} . В указанных таблицах приняты следующие обозначения: $\delta n_{Ya}, \delta t_{AUT}$ – малые приращения управляющих параметров; $(dn_{Ya})^i, (dt_{AUT})^i$ – приращения управляющих параметров, полученные на i -ой итерации; $(n_{Ya})^i, (t_{AUT})^i$ – приближения управляющих параметров на i -ой итерации. Данные таблиц иллюстрируют существенное
 Молодежный научно-технический вестник ФС77-51038, ISSN 2307-0609

улучшение сходимости: количество итераций при решении задачи с применением метода одномерной оптимизации уменьшилось приблизительно в 6 раз по сравнению с количеством итераций при применении классического метода. Отчасти это связано с тем, что введение функции невязок Δ^i позволяет равноценно учитывать влияние изменения управляющего параметра на невязки по параметрам поиска, т.е. сглаживается различие в порядках величин определяемых невязок. Это помогает избежать возникновения в процессе поиска ложных направлений изменения управляющих параметров, которые приводили бы к уменьшению только одной из невязок.

Таблица 4

Пример поитерационного решения краевой задачи с двумя управляющими параметрами (n_{Ya} и t_{AYT}) классическим методом Ньютона

Граничные условия			$x_k=11746,202$ м; $y_k=15306,578$ м; $V_k=775,6476$ м/с			
Искомое решение			$n_{Ya}=9,0$; $t_{AYT}=2,25$ с			
Начальные приближения			$n^0_{Ya}=9,4$; $t^0_{AYT}=2,24$ с			
Параметр останова			x			
i	ΔV^i , м/с	Δy^i , м	$\Delta V^i(n_{Ya}+\delta n_{Ya})$, м/с	$\Delta y^i(n_{Ya}+\delta n_{Ya})$, м	$\Delta V^i(t_{AYT}+\delta t_{AYT})$, м/с	$\Delta y^i(t_{AYT}+\delta t_{AYT})$, м
1	26,37910643	-1296,22485700	26,37910638	-1296,22486400	26,37922505	-1296,28155000
2	-24,87157603	725,84521940	-24,87157609	725,84521250	-24,87153313	725,84460630
3	42,85991822	-1418,64644600	42,85991817	-1418,64645300	42,86006645	-1418,65079300
...						
9	-2,71458896	83,83192108	-2,71458901	83,83191395	-2,71454300	-712,30097090
10	3,02314958	-94,45794255	3,02314952	-94,45794972	3,02319515	-717,19405240
11	-3,38654148	104,71309820	-3,38654153	104,71309100	-3,38648645	-711,64740800
12	2,45284270	-76,79856996	2,45284265	-76,79857713	2,45289722	-716,73439380
...						
68	0,00006444	-0,00200298	0,00006438	-0,00201012	0,00011917	-0,00303945
69	-0,00004387	-0,00136363	-0,00004393	0,00135648	0,00000190	0,00060571
70	0,00004329	-0,00134575	0,00004324	-0,00135290	0,00009803	-0,00238223
71	-0,00003199	0,00099453	-0,00003205	0,00098739	0,00002274	-0,00004194

продолжение таблицы 4

i	$(dn_{Ya})^i$	$(dt_{AYT})^i$, с	$(n_{Ya})^i$	$(t_{AYT})^i$, с
1	-0,63557385	-0,02519425	8,76442615	2,21480575
2	0,47582142	0,06468246	9,24024757	2,27948822
3	-0,17994884	-0,02955698	9,06029873	2,24993123
...				
9	0,04841913	0,00651220	9,02507085	2,25334016
10	-0,05450296	-0,00730563	8,97056789	2,24603453
11	0,05000895	0,00667556	9,02057684	2,25271010
12	-0,03657413	-0,00487828	8,98400271	2,24783182
...				
68	-0,00000095	-0,00000013	8,99999899	2,25000012
69	0,00000079	0,00000011	8,99999978	2,25000022
70	-0,00000064	-0,00000009	8,99999914	2,25000014
71	0,00000047	0,00000006	8,99999961	2,25000020

Таблица 5

Пример поитерационного решения краевой задачи с двумя управляющими параметрами (n_{Ya} и t_{AYT}) методом Ньютона с введением одномерной оптимизации.

Граничные условия		$x_k=11746,202$ м; $y_k=15306,578$ м; $V_k=775,6476$ м/с				
Искомое решение		$n_{Ya}=9,0$; $t_{AYT}=2,25$ с				
Начальные приближения		$n^0_{Ya}=9,4$; $t^0_{AYT}=2,24$ с				
Параметр останова		x				
i	ΔV^i , м/с	Δy^i , м	$\Delta V^i(n_{Ya}+\delta n_{Ya})$, м/с	$\Delta y^i(n_{Ya}+\delta n_{Ya})$, м	$\Delta V^i(t_{AYT}+\delta t_{AYT})$, м/с	$\Delta y^i(t_{AYT}+\delta t_{AYT})$, м
1	-18,9470221	851,7005726	-18,94702216	851,7005656	-18,94697946	851,6999677
2	7,78339940	-103,6699855	7,78339934	-103,6699927	7,78345354	-103,6710175
3	3,28080277	-103,3312592	3,28080271	-103,3312663	3,28085722	-103,3322962
4	1,58716768	-50,17599509	1,58716763	-50,17600225	1,58722280	-50,17703191
5	0,58754050	-18,78391689	0,58754044	-18,78392404	0,58759518	-18,78495351
6	0,21610628	-7,05281869	0,21610622	-7,05282584	0,21615204	-7,05357662
7	-0,02469151	0,60035551	-0,02469157	0,60034837	-0,02463677	0,59921904
8	-0,00113227	-0,00884587	-0,00113233	-0,00885302	-0,00107754	-0,00988235
9	-0,00160314	0,02781155	-0,00160320	0,02780440	-0,00154840	0,02677508
10	-0,00025872	0,00804193	-0,00025877	0,00803478	-0,00021294	0,00728402
11	0,00028956	-0,00900072	0,00028950	-0,00900787	0,00033533	-0,00975863
12	-0,00002138	0,00066464	-0,00002144	0,00065749	0,00003335	-0,00037183

продолжение таблицы 5

i	$(dn_{Ya})^i$	$(dt_{AYT})^i$, с	$(n_{Ya})^i$	$(t_{AYT})^i$, с	k^i_{opt}
1	0,74718017	0,05477898	8,97359008	2,26738949	0,50000000
2	0,05406429	-0,01382329	9,02765437	2,25356620	1,00000000
3	-0,04954817	-0,00653631	9,01375875	2,25173311	0,28044662
4	-0,02432583	-0,00315954	9,00528734	2,25063281	0,34824772
5	-0,00929300	-0,00117093	9,00204658	2,25022447	0,34873062
6	-0,00429370	-0,00052559	8,99989973	2,24996167	0,50000000
7	0,00016150	0,00004679	9,00001869	2,24999614	0,73657251
8	0,00003683	0,00000169	9,00000027	2,24999698	0,50000000
9	-0,00000310	0,00000290	8,99999718	2,24999988	1,00000000
10	0,00000465	0,00000062	9,00000182	2,25000050	1,00000000
11	-0,00000520	-0,00000070	8,99999922	2,25000015	0,50000000
12	0,00000032	0,00000004	8,99999942	2,25000018	0,62500000

Рассмотренный вариант модификации метода Ньютона помогает уменьшить вероятность расходимости и, таким образом, позволяет повысить надёжность работы алгоритма. Применение одномерной оптимизации в рассматриваемом случае также позволяет снизить чувствительность краевой задачи к выбору параметра останова и получать устойчивое решение при параметре останова, не являющемся достаточно удачным в некотором выбранном диапазоне граничных условий.

Результаты решения краевой задачи размерности $n=2$ проиллюстрируем аналогично тому, как в разделе 2 было продемонстрировано влияние выбора параметра останова. Выборку граничных условий A_m ($m=1,2,\dots$) произведём из заранее рассчитанной

Молодежный научно-технический вестник ФС77-51038, ISSN 2307-0609

траектории с базовой нормальной перегрузкой $n_{Y_a}^6 = 9$. В качестве примера рассмотрим в качестве вектора управляющих параметров $\bar{Y} = [n_{Y_a} \quad t_{AUT}]^T$. Результаты решения краевой задачи для выборки граничных условий в этом случае представлены в табл. 6. Для каждой из точек A_m (там, где это возможно) представлено два решения: классическим методом (первая строка) и методом с применением одномерной оптимизации (вторая строка). Кроме того, в табл. 6 приведены результаты решения для четырех значений точности по параметру останова ε_x (или ε_y – в зависимости от диапазона граничных условий): 10^{-4} м, 10^{-5} м, 10^{-6} м и 10^{-7} м.

Таблица 6

Результаты решения двухпараметрической краевой задачи для выборки граничных условий $\{A_m, (m=1,2,\dots,37)\} \equiv \{x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_{37}, y_{37}\}$ из траектории, полученной при $n_{Y_a}^6 = 9$, для управляющих параметров n_{Y_a} и t_{AUT} .

m	θ_{cm} , град	x_m , М	y_m , М	V_m , м/с	$n_{Y_a}^6$	t_{AY}^0 , с	кол-во итераций				параметр останова
							$\varepsilon=10^{-4}$	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	30,168602	7411,242	10462,638	1023,315 4	9,5	2,2	23	9	6	5	x
							12	16	8	10	
2	40,057385	9090,904	11636,692	934,2518	9,5	2,2	20	16	6	5	x
							19	15	9	10	
3	50,431963	10358,47 4	12908,728	866,3037	9,5	2,2	-	21	5	5	x
							19	9	19	11	
4	60,003435	11175,75 3	14080,839	817,9093	9,5	2,2	-	9	7	6	x
							15	15	11	11	
5	70,297320	11746,20 2	15306,578	775,6476	8,5	2,2	31	9	6	7	y
							16	14	12	12	
6	80,014635	12039,01 1	16404,615	741,8431	8,5	2,2	14	9	6	5	y
							9	13	12	12	
7	90,366359	12131,92 9	17488,211	710,6184	8,5	2,2	-	6	7	7	y
							-	12	12	12	
8	100,635809	12039,96 1	18458,066	683,2188	8,5	2,2	17	9	7	5	y
							12	10	12	12	
9	110,726825	11805,58 3	19297,203	659,1042	9,5	2,2	14	7	5	5	y
							11	13	11	11	
10	120,535159	11470,21 7	19998,288	637,9613	9,5	2,2	18	9	5	6	y
							12	11	10	11	
11	130,825967	11032,05 9	20610,008	618,0171	9,6	2,4	25	10	7	5	y
							12	14	13	13	
12	140,680331	10552,92 6	21077,621	601,0101	9,6	2,4	26	12	7	5	y
							15	12	16	13	
13	149,973606	10065,34 0	21415,458	586,8697	9,6	2,4	63	11	6	6	y
							17	-	13	13	
14	160,536836	9487,281	21682,491	572,7853	8,5	2,2	-	8	5	6	y
							16	14	13	13	
15	170,413792	8939,161	21824,868	561,4897	9,5	2,2	-	7	6	6	x
							25	11	10	10	
16	180,506281	8385,150	21869,155	551,7802	9,5	2,2	-	-	-	6	x
							-	-	-	-	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	190,760430	7840,874	21815,695	543,7590	9,5	2,35	-	7	6	5	x
							9	10	11	11	
18	200,077091	7372,181	21686,545	538,0265	9,5	2,35	-	8	6	5	x
							13	13	11	11	
19	210,467638	6888,547	21458,306	533,2929	9,5	2,35	-	9	7	6	x
							30	19	10	11	
20	220,837586	6457,160	21148,873	530,1992	9,5	2,35	-	9	9	7	x
							67	16	12	12	
21	230,104478	6123,458	20809,582	528,6854	9,5	2,35	-	14	10	8	x
							-	13	12	13	
22	240,281622	5822,351	20376,272	528,2112	8,6	2,35	-	18	42	8	y
							23	23	21	20	
23	250,295482	5601,864	19896,805	528,7441	8,6	2,35	-	37	6	7	y
							20	-	12	12	
24	260,120139	5467,058	19385,644	529,8801	8,6	2,35	-	14	8	8	y
							23	16	17	17	
25	270,696225	5420,629	18804,648	531,3860	8,6	2,35	-	8	6	8	y
							12	16	18	18	
26	280,100453	5470,803	18275,520	532,7915	9,6	2,35	17	7	5	5	y
							16	10	13	12	
27	290,225164	5624,287	17709,948	534,0004	9,6	2,35	26	9	6	5	y
							13	13	13	13	
28	300,144404	5874,226	17178,831	534,4324	9,6	2,35	13	9	6	5	x
							12	14	13	13	
29	310,772679	6245,689	16657,522	533,7290	9,6	2,35	7	10	6	5	x
							13	14	13	13	
30	320,384251	6663,867	16247,781	531,7506	9,6	2,35	-	-	-	-	x
							13	14	13	13	
31	330,786586	7187,772	15888,834	527,8427	9,6	2,35	-	-	-	-	x
							-	-	25	25	
32	340,305617	7713,156	15649,811	522,5390	9,6	2,35	-	-	-	-	x
							-	14	21	16	
33	350,745037	8315,116	15494,182	514,8090	8,5	2,35	10	10	6	6	x
							12	10	11	11	
34	360,435781	8874,328	15450,795	505,9269	9,6	2,35	29**	182*	5**	6**	x
							38**	-	10**	10**	
35	370,316818	9422,114	15501,996	495,3500	9,6	2,35	18	35	6	6	x
							27	21	11	11	
36	380,468017	9940,556	15644,265	483,1240	9,6	2,35	11	13	6	5	x
							18	23	12	12	
37	390,006597	10371,66 2	15847,022	470,5619	9,6	2,35	8	10	6	6	x
							14	15	12	12	

*- соответствует решению $n_{\gamma a}=9$, $t_{\text{ЛУТ}}=2,25$ с; **- соответствуют решению $n_{\gamma a}=9,325786$, $t_{\text{ЛУТ}}=2,2632$ с

Из данных, приведённых в табл. 6, видно, что точность достижения параметра останова в рассматриваемой задаче существенно влияет на сходимость. Во многих случаях увеличение точности на один порядок – с 10^{-4} м до 10^{-5} м при применении классического метода Ньютона приводит к сокращению количества итераций приблизительно в 2 раза, а также к появлению регулярной сходимости в тех областях граничных условий, где при относительно низкой точности наблюдалось расхождение краевой задачи. Дальнейшее повышение точности также уменьшает количество итераций, необходимое для решения краевой задачи, но является менее эффективным. Для

модифицированного метода Ньютона влияние точности достижения параметра останова неоднозначно для различных областей граничных условий.

Таким образом, применение модифицированного метода целесообразно в случаях, когда не представляется возможным обеспечение высокой точности по параметру останова, а также при неблагоприятных начальных приближениях. Стоит отметить, что в табл. 6 приведены варианты решения краевых задач при начальных приближениях вектора управляющих параметров, достаточно близких к искомому, в случае же, когда алгоритм находится на начальных стадиях решения далеко от удачного приближения, классический метод Ньютона не позволяет получить устойчивое решение во всех представленных диапазонах граничных условий. В таких вариантах для обеспечения устойчивой сходимости целесообразно использование комбинированного метода решения краевой задачи: описанная выше одномерная оптимизация применяется при грубом первом приближении вектора управляющих параметров (при этом возможно, как отмечалось выше, снизить требования к точности по параметру останова), по мере приближения к решению производится переход к классическому методу Ньютона и увеличение точности по параметру останова.

Заключение

Выбор того или иного метода для решения краевой задачи существенно зависит от её специфики, поэтому не представляется возможным дать универсальные рекомендации по выбору алгоритма решения без осуществления предварительного изучения физических особенностей задачи.

Описанная в данной работе модификация распространённого метода численного решения краевых задач – итерационного метода Ньютона с применением замены частных производных конечными разностями первого порядка – позволяет повысить надёжность работы алгоритма, улучшить регулярность решения в случаях сложных поверхностей поиска, образованных управляющими параметрами и невязками граничных условий.

Подход к одномерной оптимизации, представленный автором, не является универсальным. В зависимости от особенностей решаемой задачи, он может быть применён с введением функции невязок Δ в форме, отличной от описанной в работе; наиболее подходящий вид функции $\Delta(k)$ также может быть выбран в зависимости от условий конкретной задачи.

Также в работе на примере простейшей задачи было показано влияние на сходимость параметра останова и представлен подход к его выбору при реализации решения краевой задачи в виде вычислительного машинного алгоритма.

По результатам проведённой работы можно сделать следующие выводы:

1. Увеличение точности достижения параметра останова приводит к существенному уменьшению методической погрешности и уменьшению количества итераций при решении краевой задачи.
2. Одномерная оптимизация, описанная в данной работе, в отдельных областях граничных условий позволяет улучшить регулярность решения, хотя использование данного метода при малой размерности задачи не даёт выигрыша в машинном времени, затрачиваемом на решение.
3. Устойчивость решения краевой задачи и машинное время, затрачиваемое на решение, существенно зависят от параметра останова, выбор которого необходимо осуществлять с учётом физических особенностей задачи.
4. Одной из наиболее трудных проблем, возникающих при решении системы нелинейных уравнений, является локализация решения, с этим, как правило, связаны большие вычислительные затраты. В рассмотренной простейшей краевой задаче движения ЛА в вертикальной плоскости были выявлены области, где локализация наиболее осложнена в связи с наличием пересечения решений (связанного с большой плотностью траекторий, соответствующих разным значениям управляющих параметров). В данной работе был применен градиентный метод уменьшения требуемых невязок с выбором шага движения по градиенту. Опытным путем было установлено что в рассматриваемой задаче наиболее подходящими шагами для осуществления дальнейшей параболической интерполяции функции невязок являются $k = 0,50; 0,75; 1,00$.
5. На начальных этапах решения краевой задачи, когда алгоритм находится далеко от удачного приближения, можно использовать описанную в работе одномерную оптимизацию, а затем, по мере приближения к решению, производить переход к классическому итерационному методу Ньютона. Использование подобного комбинированного метода позволит уменьшить машинное время, обеспечив при этом регулярность решения.

Список литературы

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2008. 634 с.

3. Волков Е.А. Численные методы: Учебное пособие для вузов. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1987. 248 с.
4. Дмитриевский А.А., Лысенко Л.Н. Внешняя баллистика: Учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 2005. 608 с.
5. Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.
6. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полёта беспилотных летательных аппаратов. М.: Оборонгиз, 1963. 550 с.
7. Тарасик В.П, Математическое моделирование технических систем: Учебник для вузов. 2-е изд., испр. и доп. Минск.: Дизайн ПРО, 2004. 640 с.
8. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. Введ. 1982-01-07. М.: Изд-во стандартов, 2004. 181 с.