

УДК 533.6.011.5

## **Применение аналитических формул распределения давления для расчета тепловых потоков на поверхности затупленных тел**

*Ожгибисова Ю.С., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана,  
кафедра «Вычислительная математика и математическая физика»*

*Научный руководитель: Котенев В.П., д.т.н., профессор кафедры «Вычислительной математики и математической физики»,  
начальник отдела аэродинамики,  
Россия, 143966, Московская обл., г. Реутов,  
ОАО «ВПК «НПО машиностроения»  
[bauman@bmstu.ru](mailto:bauman@bmstu.ru)*

### **Введение.**

Исследование течений газа около поверхности летательных аппаратов - одна из важных задач аэродинамики. Для исследования обтекания различных конфигураций и обнаружения новых гидродинамических явлений применяются экспериментальные исследования. Сложность такого подхода состоит в использовании дорогостоящих моделей, больших временных затратах, погрешностях измерений и т. д.

Получить решение при минимальных временных затратах можно с помощью приближенных методов, одним из которых является метод Ньютона. Как правило, теория Ньютона дает удовлетворительный результат вблизи затупления, но плохо работает, когда угол наклона касательной к поверхности тела стремится к нулю. А именно такие тела наиболее интересны с точки зрения практических расчетов.

В настоящее время актуальна задача построения метода расчета газодинамических параметров, который позволил бы с высокой точностью и в простой аналитической форме описывать процесс обтекания различных затупленных тел. Основой для таких решений является рассмотрение обтекания тел вращения в двумерной постановке.

В данной работе представлены методы расчета распределения давления и расчеты распределения величины теплопередачи  $q_x$  в произвольной точке криволинейной поверхности вращения, отнесенной к тепловому потоку  $q_0$  в точке полного торможения. В основе указанных методов лежит применение универсальных формул для расчета давления повышенной точности, рассмотренные в работах [1] и [2].

Приводится сравнение полученных результатов расчета тепловых потоков с численным решением уравнений Навье-Стокса, представленным в работе [3].

### Постановка задачи.

Во многих работах приводятся достаточно простые формулы распределения безразмерных тепловых потоков на поверхности затупленных тел, которые основаны на рассмотрении результатов численных решений, экспериментальных данных и упрощенных математических постановках.

Тем не менее, при использовании приемлемого распределения давления, эти упрощенные подходы дают хороший результат.

Для анализа тепловых потоков будем использовать формулу

$$\frac{q}{q_0} = \cos \sigma r^{\nu} P(s) \left( 2(1 + \nu) \int_0^s \cos \sigma r^{2\nu} P(s) ds \right)^{-1/2}. \quad (1)$$

введенную в работе [4].

В формуле (1)  $q/q_0$  - величина теплопередачи в произвольной точке поверхности отнесенная к величине теплового потока в точке полного торможения, для осесимметричных сечений:  $\nu = 1$ ,  $r$  - расстояние от поверхности тела до оси симметрии,  $\sigma$  - угол между касательной к поверхности и скоростью набегающего потока,  $R$  - радиус кривизны,  $s$  - криволинейная координата, выражающая длину дуги вдоль контура тела.

Для использования соотношения (1) также необходимо знать распределение давления на всем участке между интересующей точкой и точкой полного торможения. Воспользуемся результатами работ [1] и [2], где приведены формулы для распределения давления, отнесенного к давлению торможения на поверхности затупленных тел

$$P(\sigma) = \frac{\left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \cdot \left( \frac{\sigma - \pi / 2}{\sigma_* - \pi / 2} \right)^2 \right]^{\lambda(\sigma) \frac{\gamma}{\gamma - 1}}}{\left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 3} \cdot \left( \frac{\sigma - \pi / 2}{\sigma_* - \pi / 2} \right)^2 \right]}. \quad (2)$$

где  $\sigma_*$  - угол между осью тела и вектором скорости в звуковой точке,  $\gamma = 1,4$  - показатель адиабаты.

Поясним, каким образом строится функция  $\lambda(\sigma)$ , входящая в формулу (2) для тел, отличных от сферы. Для случая сферы  $\lambda(\sigma) \equiv 1$ . Так как в звуковой точке должно

выполняться равенство  $p_* = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ , то  $\lambda(\sigma_*) = 1$ . Будем считать функцию  $\lambda(\sigma)$  линейной. Пусть вторая точка  $x_0$ , через которую проходит прямая  $\lambda(\sigma)$ , лежит в небольшой окрестности  $\sigma_*$  и  $\lambda(x_0) = \lambda_0$ . Тогда  $\lambda(\sigma)$  имеет вид

$$\lambda(\sigma) = 1 + \frac{1 - \lambda_0}{\sigma_* - x_0} (\sigma - \sigma_*). \quad (3)$$

Положение точки  $x_0$  определим эмпирически в зависимости от положения звуковой точки на поверхности тела из условия:

$$\text{если } \sigma_* > \sigma_*, \text{ то } x_0 = 1,15\sigma_*; \quad (4)$$

$$\text{если } \sigma_* < \sigma_*, \text{ то } x_0 = 0,85\sigma_*, \quad (5)$$

где  $\sigma_{**}$  определяет положение звуковой точки на сфере.

В небольшой окрестности звуковой точки для расчета давления с высокой точностью можно воспользоваться модификацией формулы Ньютона:

$$\text{если } \sigma \geq \sigma_*, \text{ то } P = \sin^2 \sigma + \frac{p_* - \sin^2 \sigma_*}{\cos^2 \sigma_*} \cos^2 \sigma; \quad (6)$$

$$\text{если } \sigma < \sigma_*, \text{ то } P = (p_* - P_\infty) \frac{\sin^2 \sigma}{\sin^2 \sigma_*} + P_\infty. \quad (7)$$

Величину  $\lambda_0$  будем искать из равенства давления, рассчитываемого по формуле (2), давлению, рассчитываемому по формулам (6) или (7) в точке  $x_0$ . Таким образом, в любой точке тела можно вычислить значение  $\lambda(\sigma)$ , а значит и давление по формуле (2).

Для определения положения звуковой точки  $\sigma_{**}$  на поверхности сферы используем формулу работы [3]

$$\sigma_{**} = \begin{cases} \arcsin \left( \sqrt{\frac{p_* - 1 / (1 + \gamma M^2)}{1 - 1 / (1 + \gamma M^2)}} \right) & \text{при } M < 2,5, \\ 90^\circ - (34^\circ + 40^\circ \kappa) & \text{при } M \geq 2,5. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $\kappa = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M^2}$ ,  $M$  - число Маха набегающего потока.

Для затупленных тел вращения, отличных от сферы, при нахождении  $\sigma_*$  использовалась теория контурных функций

$$f = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{1}{r\rho V},$$

которая описана в [5], [6], [7]. Данные функции удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка вдоль контура тела

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + f = \frac{\partial R}{\partial \psi},$$

где  $\psi$  - специальным образом введенная динамически-адаптивная переменная. Суть указанного метода состоит в том, что каждая точка произвольного контура аппроксимируется некоторой окружностью радиуса  $R(\sigma)$ , что дает возможность составить целевое уравнение

$$\left( \frac{f''}{f} \right)_* = \left( \frac{f''}{f} \right)_{**}.$$

Перейдем к основной задаче, рассматриваемой в статье, определению теплового потока на поверхности тела.

Интеграл из (1) преобразуется к виду

$$\int_0^s \cos \sigma r^{2\nu} P(s) ds = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \cos \sigma r^{2\nu} P(\sigma) R d\sigma. \quad (9)$$

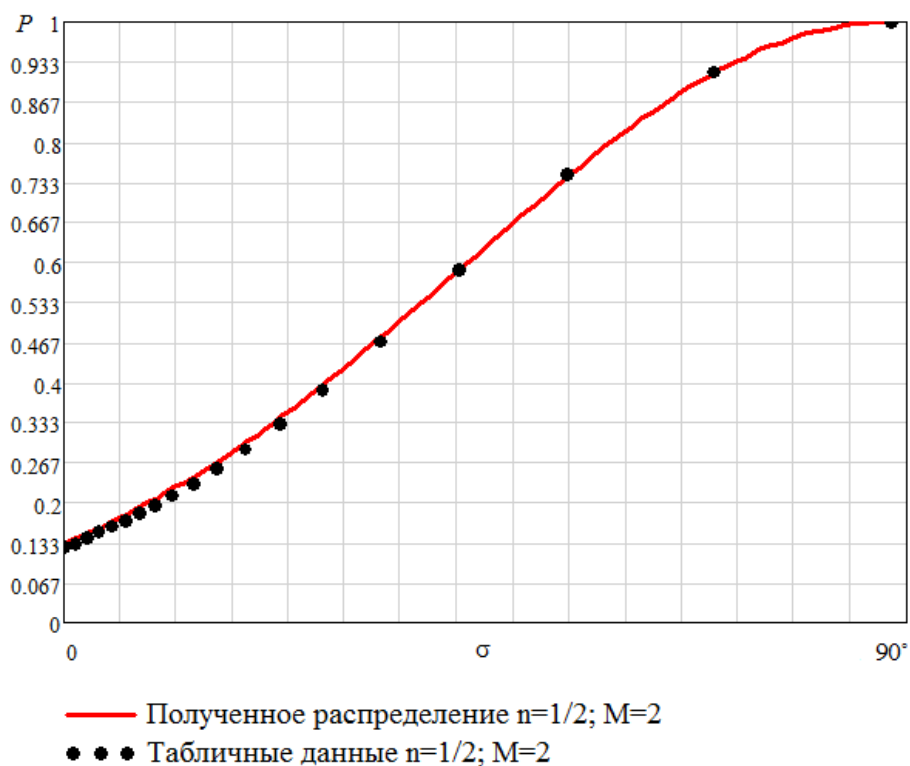
Учитывая (2), (3), (4) формула (1) преобразуется к виду:

$$\frac{q}{q_0} = \frac{\cos \sigma r(\sigma) P(\sigma)}{\sqrt{4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \cos \sigma r^2 P(\sigma) (-R) d\sigma}}. \quad (10)$$

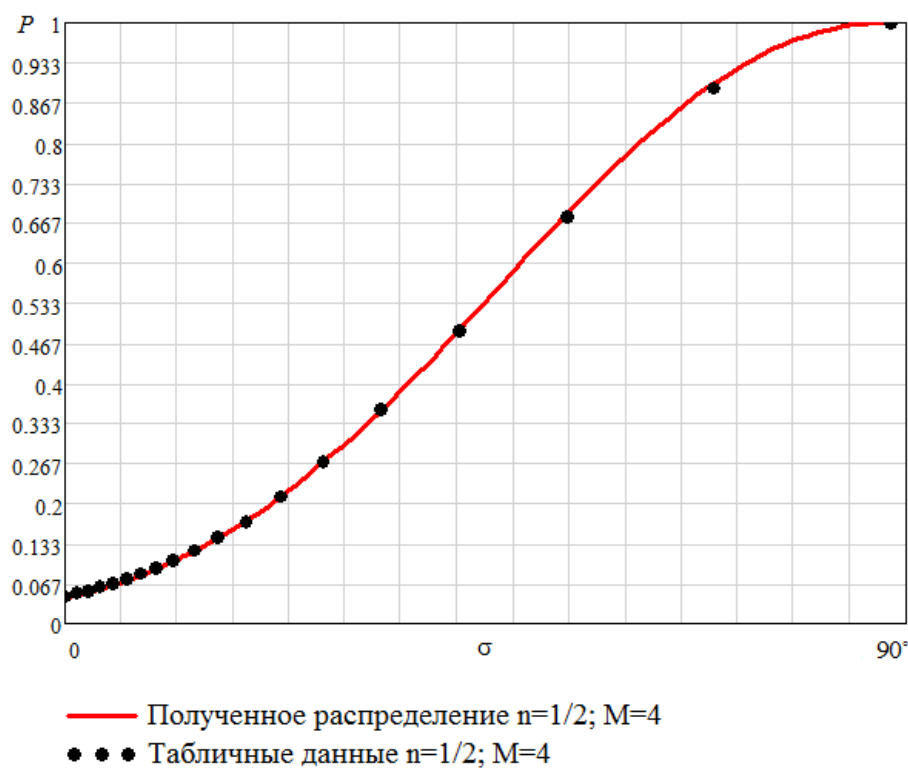
### Результаты.

Сравним результаты применения полученных формул (2) и (10) для распределения давления и тепловых потоков на поверхности затупленных тел с точным численным решением. На рис.1 а), б), в), г) сплошной линией представлено распределение давления, полученного по формуле (2), а точками – данные, представленные в работе [8]. На каждом рисунке приводятся сведения о геометрии тел, представляющих собой эллипсоид вращения с соотношением полуосей, равным «n», числом Маха набегающего потока «M». Из анализа сравнения мы сделали вывод о том, что формула (2) дает практически точное

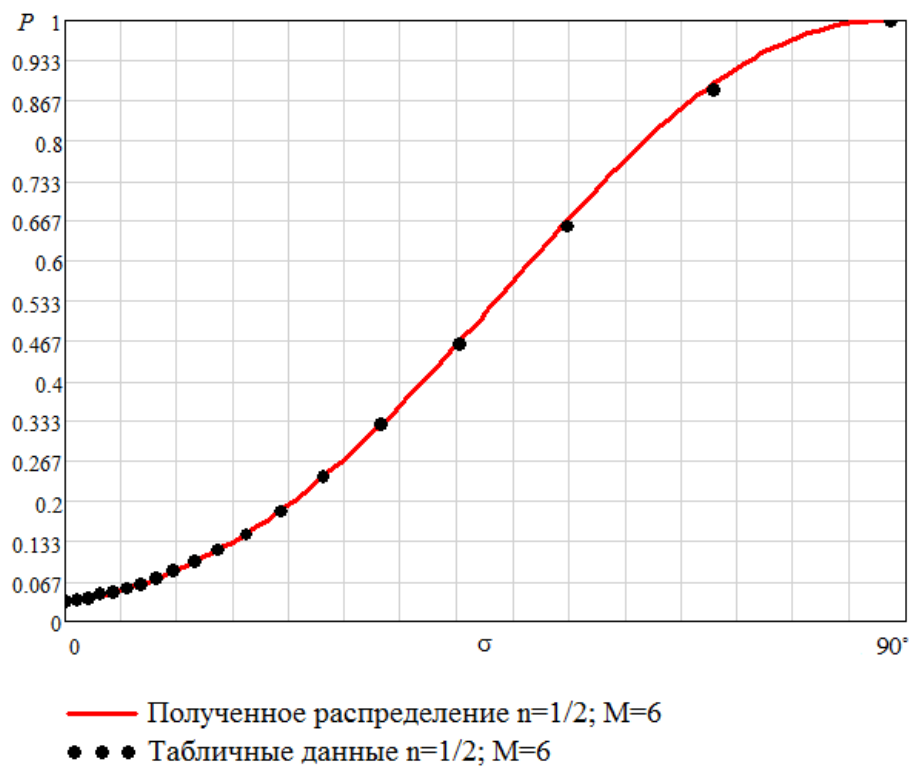
распределение. Аналогичное по точности согласование имеет место и для случая  $n = 3/2$ .



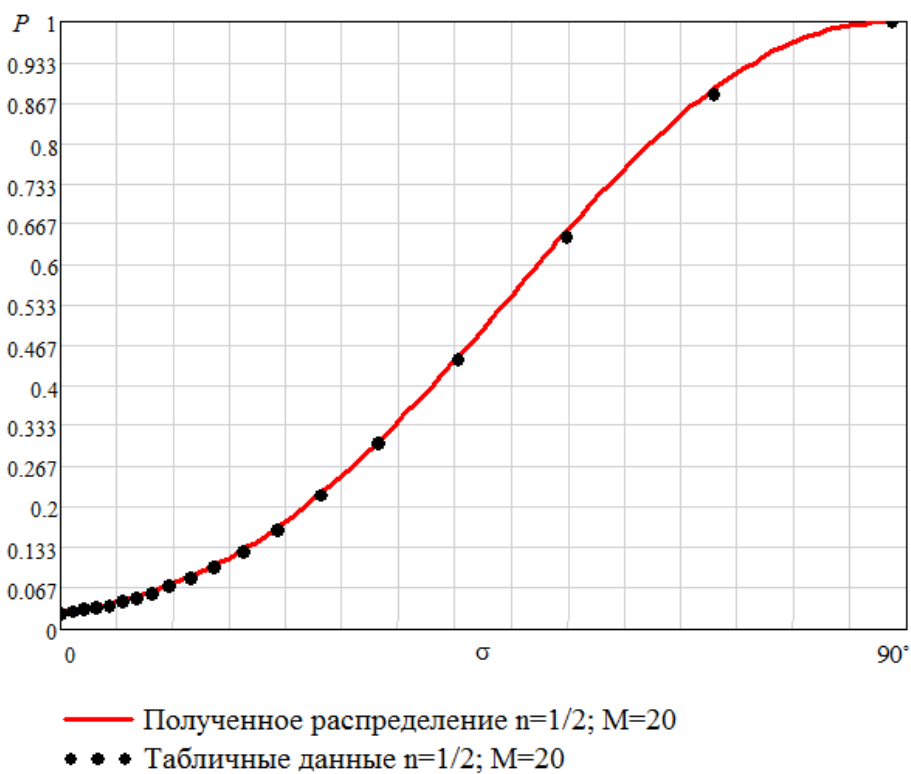
а)



б)



в)

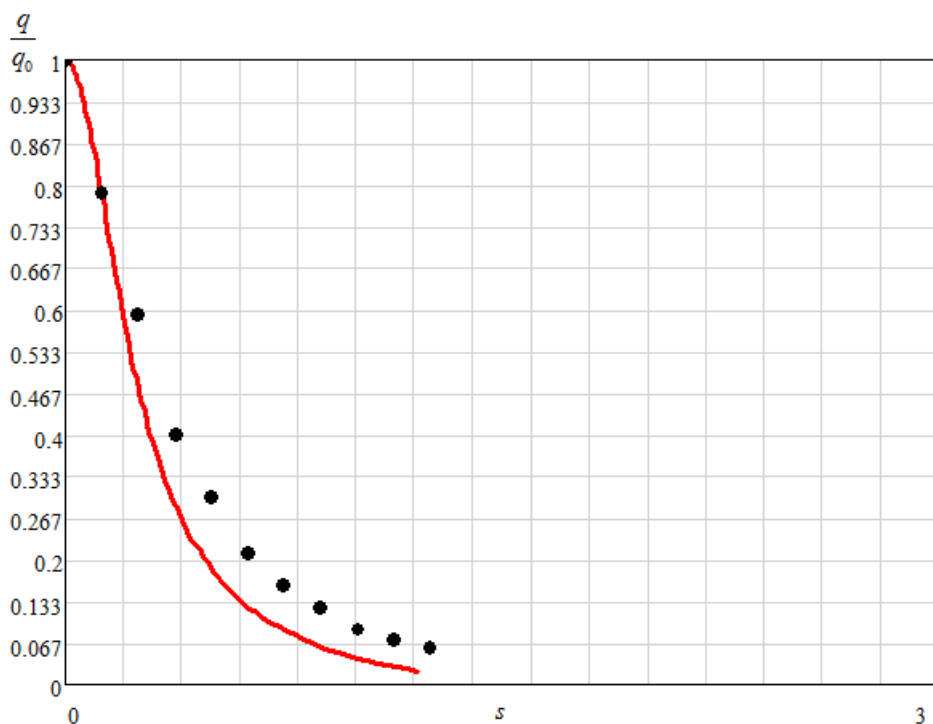


г)

Рис. 1. Распределения давления для эллиптической поверхности с отношением полуосей  $n = 1/2$  при числах Маха: а)  $M_\infty = 2$ ; б)  $M_\infty = 4$ ; в)  $M_\infty = 6$ ; г)  $M_\infty = 20$

Рассмотрим применение формулы (10) для расчета тепловых потоков на эллиптической поверхности с отношением полуосей с отношением полуосей  $n = 1/2$  и  $n = 3/2$ , и числах Маха набегающего потока, исследованных также в [3]. На рис. 2 а), б) сплошной линией представлены приближенные результаты данной статьи, а точками – результаты расчета в рамках уравнений Навье-Стокса [3].

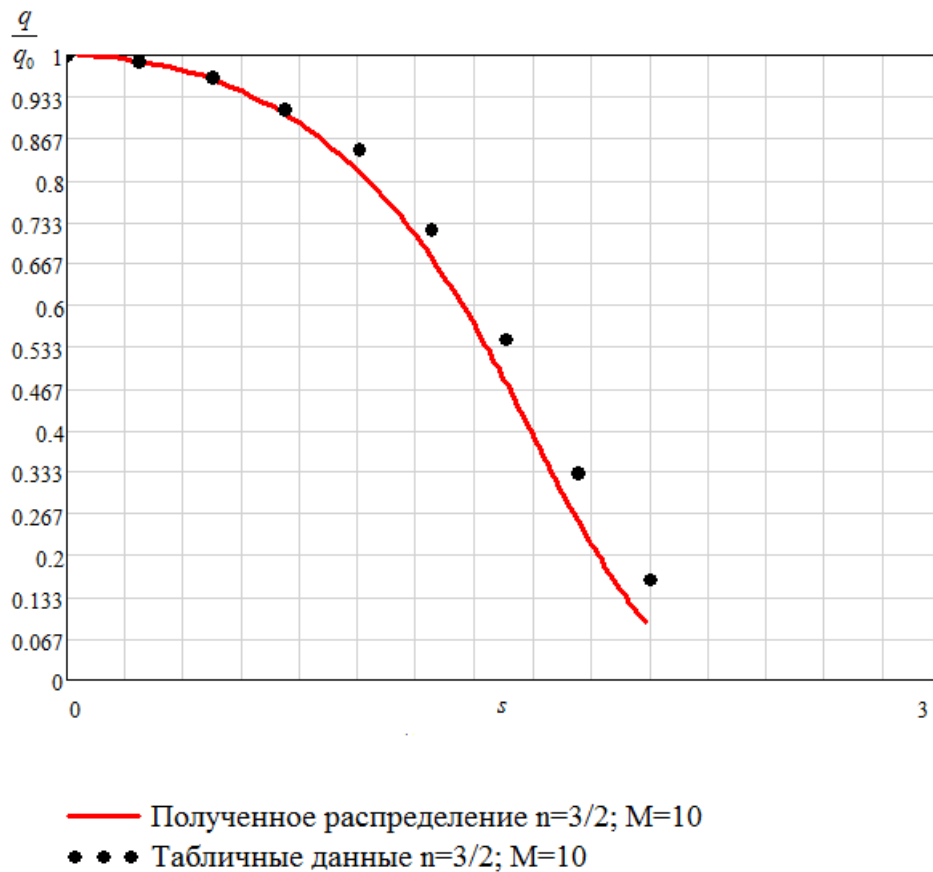
Анализ полученных результатов показывает, что расчет по приближенной формуле [1] качественно хорошо согласуется с точным решением, полученным в [3] в рамках уравнений Навье-Стокса и в первом приближении может использоваться на начальной стадии проектирования летательных аппаратов.



— Полученное распределение  $n=1/2; M=10$

• • • Табличные данные  $n=1/2; M=10$

а)



б)

Рис. 2. Распределения  $q / q_0$  для эллиптической поверхности с отношением полуосей а)  $n = 1 / 2$  и б)  $n = 3 / 2$  при числе Маха  $M_\infty = 10$

### Заключение.

Таким образом, формулу для распределения давления можно использовать для быстрой оценки теплового потока на поверхности затупленных тел с хорошей точностью, не затрачивая сколь-нибудь существенных временных и вычислительных ресурсов.

### Список литературы

1. Котенев В.П. Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 9. С. 141-148.
2. Котенев В.П., Сысенко В.А. Аналитические формулы повышенной точности для расчета распределения давления на поверхности выпуклых, затупленных тел вращения произвольного очертания // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Т. 1. № 1-1. С. 68-81.



3. Брыкина И.Г. Методы расчета теплопередачи и трения при пространственном гиперзвуковом ламинарном обтекании тел во всем диапазоне чисел Рейнольдса: автореф. дис... д-ра. физ.-мат. наук. М., 2013. 38 с.
4. Лунев В.В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 328 с.
5. Котенев В.П. Уравнения двумерных течений газа в динамических переменных // Информационные технологии. 2007. № 1. С. 37-41.
6. Димитриенко Ю.И., Котенев В.П., Захаров А.А. Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 280 с.
7. Котенев В.П., Сысенко В.А. Уточненный метод быстрой оценки давления на поверхности гладких затупленных тел // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. Спец. вып. «Математическое моделирование». № 3. 2012. С. 64-74.
8. Любимов А.Н., Русанов В.В. Течения газа около тупых тел. М.: Наука, 1970. 379 с.