

# 07, июль 2017

УДК 519.711

## **Режимы свободных колебаний без затрат энергии в системе управления ориентацией и стабилизации космического аппарата**

*Болотских А.А., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
факультет «Аэрокосмический»*

*Научный руководитель: Симоньянц Р.П., к.т.н., доцент  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
факультет «Аэрокосмический»*

*[bauman@bmstu.ru](mailto:bauman@bmstu.ru)*

Рассматривается динамика управляемого движения относительно центра масс орбитального космического аппарата (КА) с учетом влияния гравитационного момента. Анализируются движения в плоскости тангажа, полагая при этом, что перекрестное влияние движений по курсу и крену, пренебрежимо мало.

Управление ориентацией и угловая стабилизация КА осуществляется реактивной системой по релейному закону с линейным формированием управляющего сигнала. Исследование проводится в нелинейной постановке методами качественной теории динамических систем и компьютерного моделирования.

Релейный закон управления имеет зону нечувствительности, внутри которой КА совершает свободные движения. При этом гравитационный момент действует как восстанавливающий, возвращая КА к положению устойчивого равновесия [1, с.7].

Если на фазовой поверхности в зоне нечувствительности найдется такая область, которая всюду заполнена замкнутыми фазовыми траекториями, то в системе управления возможны неограниченные по времени режимы пассивной угловой стабилизации с выключенными исполнительными органами.

В работах [3, с. 67], [4, с.181] упоминается возможность существования таких режимов в аналогичной системе, но авторы не изучали условий их существования. В настоящей работе найдены эти условия в аналитическом виде. Показано, что они реализуемы, что после завершения этапа активного управления ориентацией или после парирования начальных возмущений, система может в переходном процессе из определенной области начальных условий войти в режим свободных колебаний без затрат

энергии. Для подтверждения аналитических результатов выполнено численное моделирование с использованием программы model [2].

Принимая условие, что тензор инерции КА диагональный, а гироскопические моменты пренебрежимо малы, движения вокруг каждой из связанных осей можем рассматривать как независимые. Тогда неуправляемое движение по тангажу описывается нелинейным динамическим уравнением вида [1, с. 81]

$$J_3 \frac{d^2 x}{dt^2} + M_g \sin 2x = M_g, \quad (1)$$

где  $x$  – угловое отклонение КА (угол тангажа);  $M_g = \frac{3}{2} \omega_*^2 (J_1 - J_2)$  – максимальное значение гравитационного момента;  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции по крену, курсу и тангажу ( $J_2 < J_1 < J_3$ );  $\omega_*$  – орбитальная угловая скорость радиус-вектора центра масс.

Дополним уравнение (1) управляющим моментом  $M_u(\sigma)$

$$M_u = -M_p(\sigma), \quad (2)$$

где  $M_p$  – модуль управляющего момента (2),  $F(\sigma(x, y))$  – нелинейный закон управления, представляющий собой релейную функцию общего вида, аргумент которой  $\sigma(x, y)$  – линейная комбинация измеряемых значений параметров состояния  $x$  и  $y = dx/dt$ .

Полагая, что датчики, измеряющие текущие значения фазовых координат идеальны, линейную функцию управляющего сигнала запишем в виде:

$$\sigma = x + k y, \quad (3)$$

где  $k$  – коэффициент усиления по скорости.

С учетом (1), (2), (3) динамическая модель управляемого движения по тангажу может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} J_3 \frac{dx^2}{dt^2} = M_g - M_g \sin 2x - M_p F(\sigma), \\ F(\sigma) = 1/2 [\operatorname{sgn}(\sigma - \alpha + h \cdot F_0) + \operatorname{sgn}(\sigma + \alpha + h \cdot F_0)], \\ \sigma = x + k \cdot y, \end{cases} \quad (4)$$

где через  $\alpha, h, F_0$  обозначено соответственно порог срабатывания, ширина петли гистерезиса и значение  $F(\sigma)$  в предшествующий момент времени  $F_0(t) = F(t-0)$ .

Поскольку релейная функция принимает только три значения  $F = +1, 0, -1$ , возможна декомпозиция системы (4), представлением рассматриваемого движения на трех листах фазовой поверхности:

$$F^+ = \{(x, y) : F(\sigma) = +1\}, \quad F^0 = \{(x, y) : F(\sigma) = 0\}, \quad F^- = \{(x, y) : F(\sigma) = -1\}.$$

Первое уравнение системы (4) не содержит диссипативных членов, т.е. движение консервативно. Это позволяет на каждом из листов трехлистной фазовой поверхности траектории строить упрощенно на основе интегралов энергии [1].

Исключим из (4) время  $t$ , выразив вторую производную угла тангажа (угловое ускорение) через величины  $\frac{dy}{dt}$  и  $dt = \frac{dx}{y}$ :  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = y \frac{dy}{dx}$ . Тогда первое уравнение (4) примет вид

$$y \frac{dy}{dx} = g - \frac{m}{2} \sin 2x - a F_r(\sigma), \quad (5)$$

где обозначено:  $g = \frac{M_g}{J_3} = const$ ,  $m = 2 \frac{M_s}{J_3}$ ,  $a = \frac{M_p}{J_3}$ .

Границами листов фазовой поверхности служат линии переключения релейного регулятора, которые находятся из условий достижения управляющим сигналом  $\sigma(x, y)$  пороговых значений  $\sigma = \{c_1 = +\alpha, c_2 = +\alpha - h, c_3 = -\alpha, c_4 = -\alpha + h\}$ :

$$L_j : x + k \cdot y = c_j, \quad j = \overline{1,4} \quad (6)$$

На листе фазовой поверхности  $F^0$  траектории  $\Gamma^0(x, y)$ , как показано в [1, с. 81 - 85], при достаточно малых значениях  $g \ll m$  имеют характер замкнутых кривых, которые либо охватывают точку  $C_1(x_1, y_1 = 0)$  на оси абсцисс, соответствующую положению устойчивого равновесия, либо охватывают всю поверхность фазового цилиндра  $x \in (-\pi, +\pi)$ .

Если  $g \rightarrow 0$ , то  $C_1 \rightarrow 0$ , а при достаточно малой величине  $g$  точка устойчивого равновесия располагается на листе  $F^0$  зоны нечувствительности релейного регулятора  $C_1 \in F^0$ . В этом случае возможны малые свободные колебания (либрации) вокруг  $C_1$ . Определим условия существования таких режимов движения.

Если величина  $g$  мала и  $C_1 \in F^0$ , то в системе возможно существование фазовых траекторий  $\Gamma_0^0 = \Gamma^0(x, y) \in F^0$ , которые не имеют ни одной общей точки с линиями

включения  $L_1(x, y)$  и  $L_3(x, y)$ . Тогда на листе  $F^0$  существует семейство траекторий  $\Gamma^0(x, y)$ , расположенных внутри области, ограниченной фазовой траекторией  $\Gamma_0^0(x, y)$ , и все они удовлетворяют требованиям отсутствия включений управляющих моментов.

За пределами области, ограниченной  $\Gamma_0^0(x, y) \in F^0$ , могут существовать как рассмотренные выше траектории  $\Gamma_0^0(x, y)$ , так и такие, которые не удовлетворяют требованиям отсутствия включений управления: либо  $\Gamma_1^0(x, y) \in A_1(x_{A1}, y_{A1}) \in L_1$ , либо  $\Gamma_3^0(x, y) \in A_3(x_{A3}, y_{A3}) \in L_3$ . При этом  $\forall k > 0 \quad y_{A1} \geq 0, y_{B1} \leq 0, |y_{A1}| > |y_{B1}|$ .

В геометрической интерпретации на фазовой поверхности листа  $F^0$  точка  $A_1(x_{A1}, y_{A1})$  определяется пересечением  $\Gamma_0^0(x, y) \cap L_1(x, y)$ . Её существование влечет за собой существование второй точки пересечения  $B_1(x_{A1}, y_{A1})$ . Вторая точка не имеет физического смысла, так как после включения управляющего момента в точке  $A_1$  реальное движение изображающей точки происходит уже по другой траектории –  $\Gamma^+(x, y) \subset F^+$ . Однако  $B_1(x_{A1}, y_{A1})$  позволяет дать интерпретацию эволюции системы к критическому состоянию и аналитически найти условия существования пассивных режимов свободных колебаний.

При  $g \rightarrow 0$  точки  $A_1$  и  $B_1$  приближаются друг к другу, сливаясь в точке касания:  $A_1(x_1, y_1) \xrightarrow{g \downarrow} B_1(x_1, y_1) \Rightarrow K_1(x_{K1}, y_{K1})$ . Траектория:  $\Gamma_{K_1}^0(x, y) = \Gamma^0(x, y) \in K_1(x_{K1}, y_{K1})$  – критическая, ею определяются границы области  $\Omega_1^* \subset F^0$  свободных колебаний. Все траектории, берущие начало внутри  $\Omega_1^*$ , за ее пределы не выходят, т.е. ни одна траектория  $\Gamma^0(x, y)$ , имеющая в начальный момент времени  $t = 0$  точку с координатами  $(x_0, y_0) \in \Omega_1^*$ , в последующем движении  $t \rightarrow \infty$  область  $\Omega_1^*$  не покинет и замкнутую границу  $\Gamma_{K_1}^0(x, y)$  не пересечет.

Возможность существования области  $\Omega_1^*$  в пределах листа  $F^0$  определяется значением возмущающего момента  $M_g$  (1) по отношению к максимально возможной величине гравитационного момента  $M_g = \frac{3}{2} \omega_*^2 (J_1 - J_2)$ .

Для существования области  $\Omega_1^*$ , необходимо, чтобы смещенная точка  $C_1$  находилась в пределах листа  $F^0$ , т.е.  $x_1^* < \alpha$ . Из условия равновесия в точке  $C_1$  имеем [1, (5.25)]

$$x_1^* = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2M_g}{3\omega_*^2 (J_1 - J_2)} < \alpha. \quad (7)$$

Область  $\Omega_1^*$  по мере приближения точки  $C_1$  к границе  $L_1$  листа  $F^0$  сжимается. В случае  $x_1^* = \alpha$  режим свободных колебаний невозможен.

Учитывая, что свободные колебания совершаются на листе  $F^0$  в пределах малых значений отклонений  $x$ , для упрощения аналитических выводов, примем допущение:  $x \in \{x: (|x|/\pi) \ll 1\} \Rightarrow \sin 2x \approx 2x$ . Полагая также, что  $|-mx + g| \ll a$ , траектории  $\Gamma^+(x, y)$ ,  $\Gamma^0(x, y)$  и  $\Gamma^-(x, y)$  на трех фазовых поверхностях получим интегрированием линейных уравнений:

$$\begin{cases} \Gamma^+ : ydy = -adx \quad \forall (x, y) \in F^+, \\ \Gamma^0 : ydy = (-mx + g)dx \quad \forall (x, y) \in F^0, \\ \Gamma^- : ydy = +adx \quad \forall (x, y) \in F^-. \end{cases} \quad (8)$$

Для малых значений  $x_1^*$  вместо (7) применима формула:  $x_1^* \approx M_g \cdot [3\omega_*^2 (J_1 - J_2)]^{-1}$ . Величиной  $x_1^*$  определяется статическая ошибка ориентации КА. Это – равновесное значение угла ориентации, относительно которого КА совершает свободные колебания. При  $M_g = 0$  КА совершает свободные колебания относительно местной вертикали, т.е. относительно положения  $x_1^* = 0$ . Следовательно, при  $M_g = 0$  ( $g = 0$ ) область  $\Omega_1^*$  имеет максимальный размер. Этот простой случай рассматриваем в качестве расчетной модели для вывода искомым аналитических условий.

Интегрирование упрощенного уравнения  $\Gamma^0(x, y)$  из (8) дает на поверхности  $F^0(x, y)$  эллиптическую траекторию:

$$\Gamma^0(x, y): \frac{x^2}{c_0/m} + \frac{y^2}{c_0} = 1, \quad (9)$$

где  $c_0 = const$ . Значение  $c_0$  для критической траектории  $\Gamma_{K_1}^0(x, y)$  находим из условия включения в нее точки касания  $K_1$  линии  $L_1$ :  $\Gamma_{K_1}^0(x, y) = \Gamma^0(x, y) \in K_1 \in L_1$ . Опуская промежуточные преобразования, получим

$$c_0 = \frac{\alpha^2 m}{1 + k^2 m}. \quad (10)$$

Траектория  $\Gamma_{K_1}^0(x, y)$  вырезает на линии выключений  $L_2$  (6) сегмент  $[A_2, B_2]$ , точки которого порождают семейство траекторий свободных движений без включения

управляющей функции, поскольку они расположены внутри области  $\Omega_1^*$ . Найдем координаты граничных точек этого сегмента  $A_2(x_{A2}, y_{A2}) \in L_2$  и  $B_2(x_{B2}, y_{B2}) \in L_2$ . Поскольку  $k > 0$ , то  $y_{A2} \geq 0$ ,  $y_{B2} \leq 0$ ,  $|y_{A2}| > |y_{B2}|$ . Решая совместно уравнения (9), (10) и (6) (для  $j = 2$ ), находим:

$$\begin{cases} y_{A2} = \frac{\sqrt{c_0(mk^2 + 1) - m(\alpha - h)^2} + mk(\alpha - h)}{mk^2 + 1}, & x_{A2} = \sqrt{\frac{c_0 - y_{A2}^2}{m}}, \\ y_{B2} = -\frac{\sqrt{c_0(mk^2 + 1) - m(\alpha - h)^2} + mk(h - \alpha)}{mk^2 + 1}, & x_{B2} = \sqrt{\frac{c_0 - y_{A2}^2}{m}}. \end{cases} \quad (11)$$

Сегмент  $[A_2, B_2]$  на  $L_2(x, y)$  представляет собой множество точек  $(x_2, y_2) \in \Omega_1^*$ , порождающих семейство траекторий  $\Gamma^0(x, y) \subset \Omega_1^*$ , которые, в связи с установленным выше свойством области  $\Omega_1^*$ , никогда ее не покинут.

Таким образом, пассивные режимы угловой стабилизации в рассматриваемой системе существуют, если изображающая точка  $(x, y)$  либо в начальный момент времени  $t = 0$ , либо в переходном процессе управляемого движения окажется в области  $\Omega_1^* \subset F^0$ , границами которой служит замкнутая траектория  $\Gamma_{K_1}^0(x, y) \subset F^0$ , касающаяся линии включения  $L_1(x, y)$ .

Для подтверждения аналитических результатов выполним численное моделирование, используя компьютерную модель model [2]. В качестве примера рассмотрим систему со следующими параметрами:

$$a = 0,5 \cdot m = 9,65 \cdot 10^{-6} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}; \quad g = 0 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}; \quad k = 5 \text{ с}; \quad \alpha = 0,4^\circ; \quad h = 0,15^\circ.$$

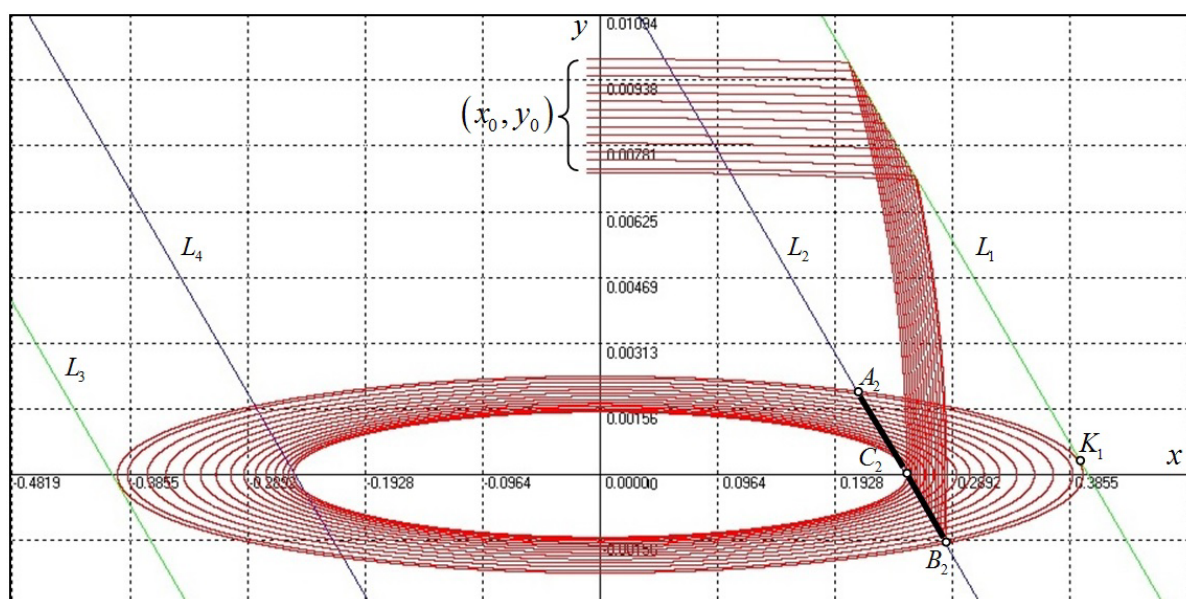
Результаты численного эксперимента в сопоставлении с результатами аналитических вычислений представлены в таблице.

Точки	A <sub>2</sub>		B <sub>2</sub>	
	x <sub>A2</sub>	y <sub>A2</sub>	x <sub>B2</sub>	y <sub>B2</sub>
Аналитический расчет	0,24300 °	0,001402 %	0,25700 °	-0,001354 %
Численное моделирование	0,24303 °	0,001395 %	0,25701 °	-0,001371 %

Как следует из приведенной таблицы, расхождения аналитических результатов и результатов численного моделирования дают хорошее совпадение: ошибка по углу не более 4%, по скорости не более 0,5%.

На рисунке представлена критическая траектория  $\Gamma_{K_1}^0(x, y) \subset F^0$ , касающаяся линии  $L_1(x, y)$ , семейство траекторий свободных колебаний относительно положения равновесия  $(x_1^* = 0, y_1^* = 0)$  в области  $\Omega_1^* \subset F^0$  и поток траекторий входа в эту область.

*Выводы.* Показано, что в релейной системе управления ориентацией и стабилизации орбитального КА при действии гравитационного момента возможны пассивные режимы установившихся движений без включения регулятора, т.е. без затрат энергии или рабочего тела. Для упрощенной модели плоского управляемого движения получены аналитические условия существования таких режимов, подтвержденные численным моделированием.



### Список литературы

- [1]. Симоньянц Р.П. Методы пассивной ориентации и стабилизации космических аппаратов: учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 132 с.
- [2]. Симоньянц Р.П., Будыка С.М. Компьютерная модель нелинейной динамики угловой стабилизации космического аппарата // Всерос. науч.-техн. конф «Аэрокосмические технологии» (г. Реутов 22 мая 2002): сб. тр. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. С. 197-203.

- [3]. Гаушус Э.В. исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Изд-во «Наука», 1976. 338 с.
- [4]. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управления ориентацией космических аппаратов. М.: Изд-во «Наука», 1974. 600 с.