

06, июнь 2017

УДК 524.8

Аннигиляция темной материи при аккреции на черную дыру или нейтронную звезду

Козин Р. Р., студент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Физика»*

*Научный руководитель: Кауц В.Л., к.ф.-м.н., доцент
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Физика»
bauman@bmstu.ru*

Введение

Одно из самых фундаментальных открытий двадцатого века состоит в том, что обычная барионная материя, состоящая из протонов и нейтронов, не является основной во Вселенной. Новая форма материи, названная темной, составляет около 27 % ее массы.

Среди основных кандидатов на роль частиц небарионной темной материи рассматриваются тяжелые суперсимметричные частицы (WIMP), аксионы, стерильные нейтрино и др. [1].

Поиск частиц темной материи сильно затруднен вследствие малости сечений взаимодействий. Существуют несколько основных вариантов ее поиска: получение частиц темной материи на ускорителях, прямое обнаружение ее взаимодействия с веществом, косвенное обнаружение – исследование потоков вторичных частиц, образующихся в результате аннигиляции [2].

Данная работа посвящена одному из косвенных методов обнаружения темной материи – исследованию аннигиляции вблизи компактного гравитирующего объекта, интенсивность которой увеличивается благодаря увеличению концентрации в области каустики, образующейся вследствие пересечения траекторий аккрецирующих частиц.

Теоретическое исследование и математическое моделирование

Рассмотрим поток невзаимодействующих друг с другом частиц, налетающих из бесконечности на точечный источник гравитационного поля. Если все частицы на

бесконечности будут иметь скорость v , направленную параллельно оси PQ , которая проходит через центр притяжения O , то траектории всех частиц с прицельным параметром R , в силу цилиндрической симметрии будут пересекаться в одной точке на оси PQ (рис. 1).

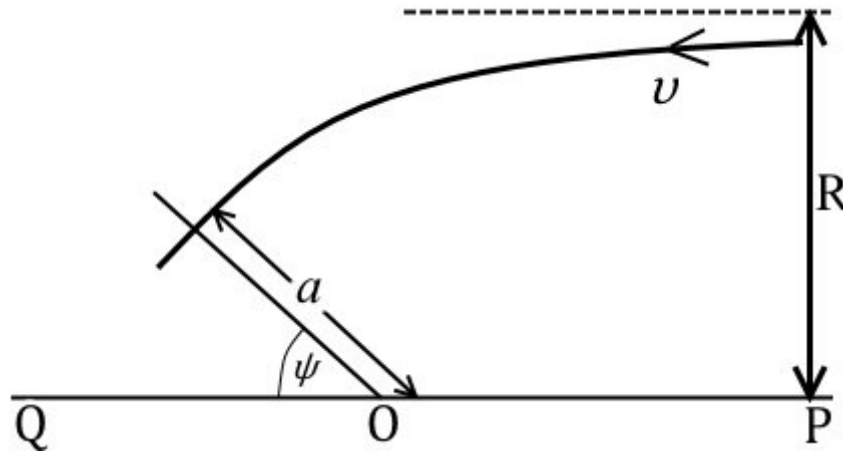


Рис. 1.Траектории налетающих частиц

В таком случае концентрация будет задаваться выражением [3]:

$$n(a, \psi) = n_0 \left(\frac{2\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)^{-1/2} \sin^{-1} \frac{\psi}{2} \left(\frac{\mu}{av^2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad (1)$$

где n_0 – концентрация на бесконечности, $\mu = GM, G$ – гравитационная постоянная, M – масса гравитирующего центра, a и ψ – расстояние и угол, указанные на рисунке. Как видно из данной формулы, на оси симметрии образуется каустика: концентрация максимальна и стремится к бесконечности.

Для частиц с максвелловским распределением по скоростям с одинаковой средней скоростью на бесконечности ($-V$), направленной вдоль оси z :

$$f(v_x, v_y, v_z) = (2\pi)^{-3/2} h^3 \exp \left[-\frac{1}{2} h^2 (v_x^2 + v_y^2 + (v_z + V)^2) \right], \quad (2)$$

где h^{-1} – дисперсия скоростей частиц, v_x, v_y, v_z – соответствующие компоненты скорости.

Используя соотношения (1) и (2), для концентрации на оси симметрии можно получить [3]:

$$\frac{n(a)}{n_0} = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_{u=0}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} (u - \beta p)^2 \right] \cdot \int_{x=0}^1 \exp[-2\beta p u x^2] \frac{q^2 + 2u^2 x^2}{(q^2 + u^2 x^2)^{1/2}} dx \cdot u du, \quad (3)$$

где безразмерные параметры $p = hV$, $q^2 = \frac{2\mu h^2}{a}$, $x = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\beta = 1$ для подветренной стороны и $\beta = -1$ для наветренной (рис. 2).

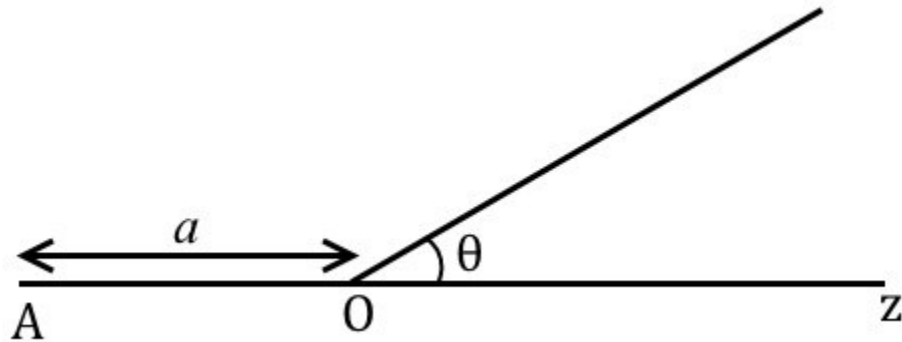


Рис. 2. Система координат

Так как вблизи оси симметрии концентрация частиц значительно увеличивается, то частота взаимодействий ω также сильно возрастает:

$$\omega = \langle \sigma v_o \rangle \frac{n^2}{2}, \quad (4)$$

где $\langle \sigma v_o \rangle$ – скорость аннигиляции, n – концентрация частиц. Множитель $1/2$ связан с тем, что каждая частица учитывается дважды: как ударяемая и как ударяющая.

Для подветренной стороны (концентрация здесь значительно выше чем в наветренной) в случае, когда $V \gg h^{-1}$, определим среднюю скорость относительного движения частиц v_o . Уравнение траектории в случае данного выбора полярных координат (a, ψ) [4]:

$$\frac{1}{a} = \frac{\mu}{v^2 R^2} (1 + \cos(\psi)) + \frac{1}{R} \sin(\psi). \quad (5)$$

Значение угловой скорости частиц получаются из закона сохранения момента импульса [4]:

$$L = const = mvR = -m\dot{\psi}a^2; \quad \dot{\psi} = -\frac{vR}{a^2}. \quad (6)$$

Продифференцировав уравнение (5) по времени с учетом соотношения (6) получим значение радиальной скорости частиц:

$$v_a = v \cos(\psi) - \frac{\mu \sin(\psi)}{vR}.$$

Значение трансверсальной скорости получим из соотношения (6):

$$v_\psi = -\frac{vR}{a} = -\left(\frac{\mu}{vR}(1 + \cos(\psi)) + v\sin(\psi)\right).$$

Относительные значения скоростей с точностью до знака для столкновения двух частиц с прицельными параметрами R_1 и $(-R_2)$:

$$v_{oa} = \frac{\mu}{v} \sin(\psi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right);$$

$$v_{o\psi} = \frac{\mu}{v} (1 + \cos(\psi)) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Соответственно суммарная относительная скорость:

$$v_o = \frac{\mu}{v} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \sqrt{2 + 2\cos(\psi)}. \quad (7)$$

Найдем соотношение между R_1 и R_2 с помощью уравнения траектории (5):

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{v^2 R_1^2} (1 + \cos(\psi)) + \frac{1}{R_1} \sin(\psi) &= \\ &= \frac{\mu}{v^2 R_2^2} (1 + \cos(\psi)) - \frac{1}{R_2} \sin(\psi), \\ \frac{\mu}{v^2} (1 + \cos(\psi)) \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) &= -\sin(\psi) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \\ \frac{\mu}{v^2} (1 + \cos(\psi)) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) &= -\sin(\psi), \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} + \frac{v^2}{\mu} \frac{\sin(\psi)}{1 + \cos(\psi)}. \end{aligned}$$

Относительная скорость (7) примет вид:

$$v_o = \sqrt{2} \left(\frac{2\mu}{vR_1} + v \frac{\sin(\psi)}{1 + \cos(\psi)}\right) \sqrt{1 + \cos(\psi)}.$$

Получим из траектории (5) параметр R_1 и подставим его в уравнение (7):

$$v_o = \sqrt{\frac{8\mu}{a} + 2v^2(1 - \cos(\psi))}.$$

Усредним по углу осевой симметрии:

$$\langle v_o \rangle = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2\mu}{a} + \frac{1}{2}v^2(1 - \cos(\psi))}.$$

Поскольку основной вклад во внутренний интеграл (3) вносит область $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (т. к. $p \gg 1$), верхний предел можно оставить неизменным при интегрировании до $\theta > \frac{\pi}{2}$. Следовательно, при вычислении частоты взаимодействия (4) можно пользоваться формулой (3) с достаточной точностью.

В качестве примера рассмотрим движущуюся с большой скоростью черную дыру, на которую налетает поток частиц темной материи (рис. 3), скорость аннигиляции которых для фотоно равна [5]:

$$\langle \sigma v_o \rangle = \frac{\lambda}{c^2} \langle v_o \rangle^2,$$

$\lambda = 10^{-3} \text{ мб} \cdot \frac{\text{М}}{\text{с}}$, c – скорость света в вакууме.

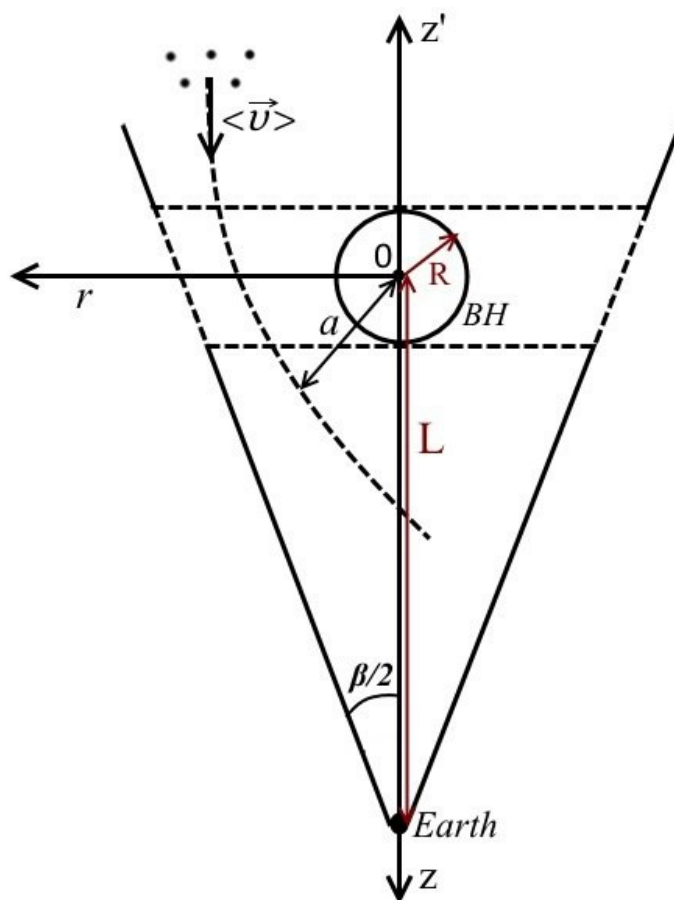


Рис. 3. Поток частиц темной материи налетает на черную дыру

Число взаимодействий в единицу времени в конусе с углом раствора β , возникающих вследствие увеличения концентрации:

$$\frac{dN}{dt} = \iiint_{(v)} \omega dv = 2 \int_R^L dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\gamma r \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\langle v_o \rangle [n - n_0]}{c} \right)^2 dr,$$

$$\gamma = (L - z) \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right),$$

$$\frac{dN}{dt} = \iiint_{(v)} \omega dv = 2\pi\lambda \left(\frac{n_0}{c} \right)^2 \int_r^L dz \int_0^\gamma r \left(\langle v_o \rangle \left[\frac{n}{n_0} - 1 \right] \right)^2 dr,$$

$$\gamma = (L - z) \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right), \quad (8)$$

где r – радиус горизонта событий черной дыры.

Для значений параметра $p \gg 1$, $q \geq 1$ и $q < 1$ можно взять приближение из работы [3]:

$$\frac{n}{n_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(q + \frac{3}{8} q^{-1} - \frac{15}{128} q^{-3} \right), \quad q \geq 1,$$

$$\frac{n}{n_0} = q^2 \exp(q^2) K(q^2), \quad q < 1, \quad (9)$$

$$K(q^2) = \int_0^\infty \exp[-q^2 \operatorname{ch}(t)] \operatorname{ch}(t) dt,$$

Преобразуем последнее выражение:

$$K(q^2) = \int_0^\infty \exp[-q^2 \sqrt{1 + \operatorname{sh}(t)}] d[\operatorname{sh}(t)],$$

$$K(q^2) = \int_0^\infty \exp[-q^2 \sqrt{1 + y^2}] dy,$$

Используем следующее приближение:

$$\sqrt{1 + y^2} \rightarrow g(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0; 1] \\ y, & y > 1 \end{cases},$$

$$\frac{\int \exp[-q^2 g(y)] dy}{\int \exp[-q^2 \sqrt{1 + y^2}] dy} < \frac{\int \exp[-q^2 \{\sqrt{1 + y^2} - \max(\sqrt{1 + y^2} - g(y))\}] dy}{\int \exp[-q^2 \sqrt{1 + y^2}] dy} <$$

$$< \frac{\int \exp[-q^2 \{\sqrt{1 + y^2} - \sqrt{2} + 1\}] dy}{\int \exp[-q^2 \sqrt{1 + y^2}] dy} = e^{q^2(\sqrt{2}-1)} < e^{\sqrt{2}-1} \approx 1,513.$$

Таким образом, погрешность в определении n не будет превышать 52 %.

$$K(q^2) = \int_0^1 \exp[-q^2] dy + \int_1^\infty \exp[-q^2 y] dy,$$

$$K(q^2) = \exp(-q^2) \left(1 + \frac{1}{q^2}\right). \quad (10)$$

Используя (10) запишем:

$$\frac{n}{n_0} = q^2 + 1, \quad q < 1. \quad (11)$$

Полученная зависимость менее точна, чем в работе [3], однако охватывает бóльшую область значений параметра q . При уменьшении параметра q отклонение значений функции (11) от результатов работы [3] снижается, и при $q < 1$ не превышает 20 %.

Теперь интеграл (8) можно взять численно с использованием следующего выражения:

$$\frac{n(a)}{n_0} = \begin{cases} q^2 + 1, & q < 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(q + \frac{3}{8} q^{-1} - \frac{15}{128} q^{-3} \right), & q \geq 1 \end{cases}$$

Результаты

Аналитически получено число аннигиляций в единицу времени, возникающих вследствие увеличения концентрации, для случая, когда можно пренебречь дисперсией скоростей частиц при расчете их траекторий.

Для черной дыры массой $10 M_\odot$, налетающей на облако фотино со скоростью 5000 км/с, при расстоянии до Земли 4000 световых лет, были рассчитаны: число аннигиляций: $\frac{dN}{dt} = 8 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, концентрация $\frac{n(a)}{n_0}$ в окрестности линии каустики (рис. 4), а также было показано, что относительная скорость взаимодействующих частиц при удалении от линии каустики убывает слабо, составляя не менее 84 % от значения на оси симметрии при отклонении на угол $\psi = 45^\circ$, что существенно при расчете процесса аннигиляции.

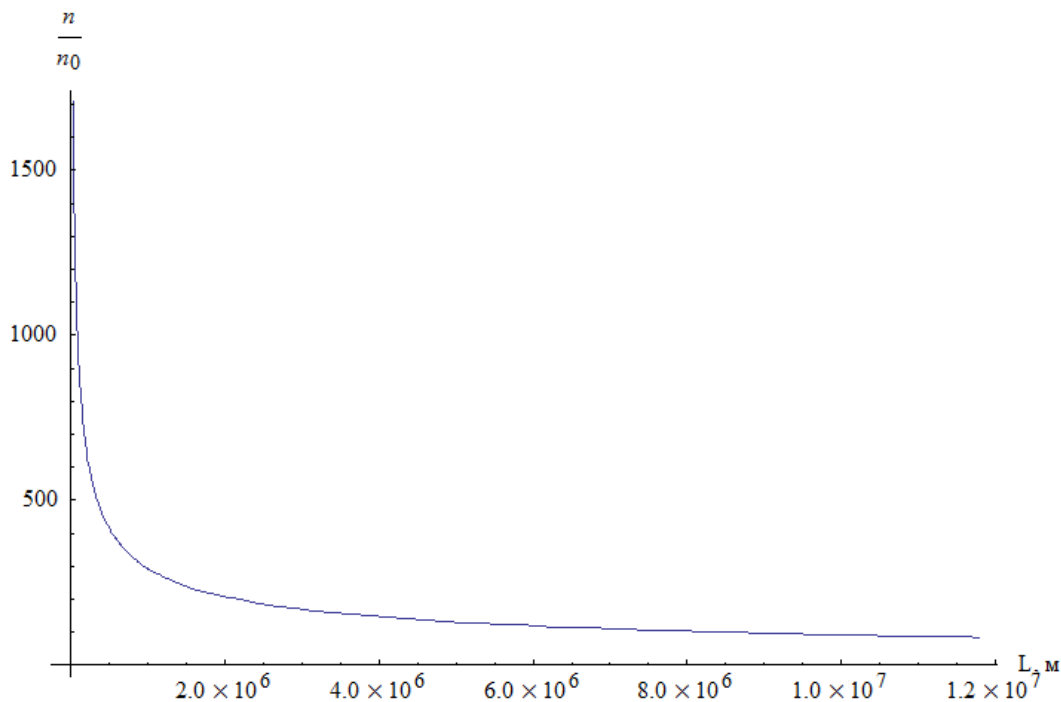


Рис. 4. Концентрация аккрецирующего вещества в окрестности линии каустики в зависимости от расстояния до компактного объекта

Также данную модель можно использовать как основу для вычислений при другом выборе моделей темной материи.

Расчеты были выполнены в среде Wolfram Mathematica 7.0.

Список литературы

- [1]. Annika H. G. Peter. Dark Matter: A Brief Review // Frank N. Bash Symposium: proceedings. The Ohio State University. Columbus, 2012. 15 p.
- [2]. Garrett K., Duda G. Dark Matter: A Primer // Advances in Astronomy. 2011. Vol. 2011. P. 22. DOI: 10.1155/2011/968283.
- [3]. Danby J. M. A., Camm, G. L. Statistical dynamics and accretion // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1957. Vol. 117. P. 50-71. DOI: 10.1093/mnras/117.1.50.
- [4]. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. 1. Механика М.: Наука, 1988. 215 с.
- [5]. Farrar G. R., Kolb E. W. Light photinos as dark matter // Phys. Rev. D. 1996. Vol. 53. P. 2990-3001. DOI: 10.1103/PhysRevD.53.2990.