

# 07, июль 2017

УДК 621.76

## **Аппроксимация полиномиальной функцией объема движения лучезапястного сустава**

*Щербак О.Ю., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Системы автоматического управления»*

*Масленников А.Л., аспирант*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Системы автоматического управления»  
[amaslennikov@bmstu.ru](mailto:amaslennikov@bmstu.ru)*

*Научный руководитель: Задорожная Н. М., к.т.н., доцент  
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,  
кафедра «Системы автоматического управления»*

### **Введение**

В медицине, в качестве одной из мер диагностики заболеваний, травм и эффективности посттравматической реабилитации суставов, например, лучезапястного, используется, так называемый, объем движения. Объем движения, характеризующий величину максимального отклонения сустава от нейтрального положения в плоскостях приведения/отведения (угол  $\psi$ ) и растяжения/сжатия (угол  $\varphi$ ), может быть выражен в углах и отображен на плоскости в виде контура в координатах  $\psi\varphi$ , (см. рис.1).

Функциональная зависимость, описывающая замкнутую кривую - контур объема движения, в дальнейшем может быть использована в качестве базиса для формирования экспертной системы диагностики состояния лучезапястного сустава. Эту зависимость можно получить аппроксимацией контура объема движения в координатах  $\psi\varphi$  полиномиальной функцией. Задача аппроксимации состоит в определении коэффициентов  $\vartheta$  полиномиальной функции  $f(\psi, \varphi, \vartheta)$  по экспериментально полученному набору данных  $Z^N$  - исходному контуру объема движения  $\Gamma_0$ . Численное решение получается путем поиска минимума  $f(\psi, \varphi, \vartheta)$ , который находится в окрестности нуля.

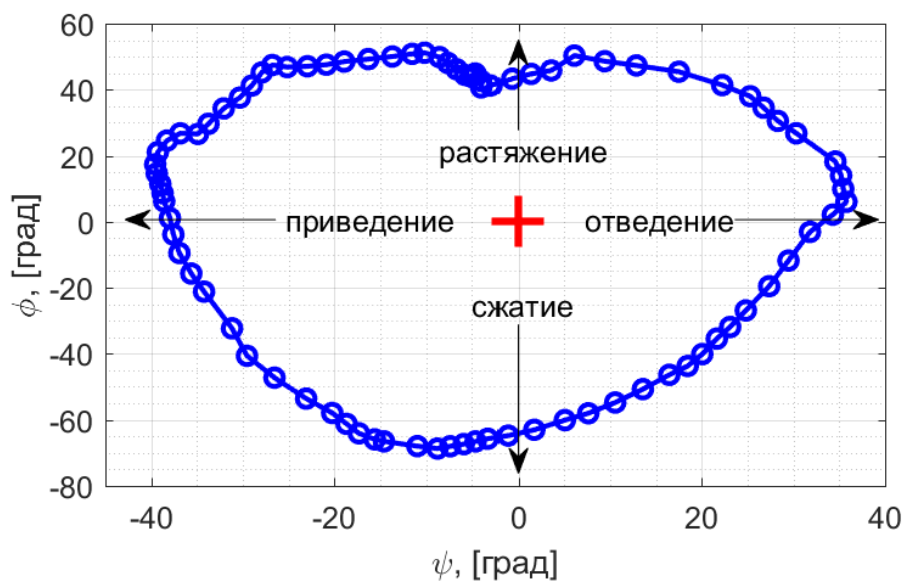


Рис. 1. Объем движения лучезапястного сустава в координатах  $\psi\phi$

Существует несколько методов, решающих эту задачу, например, геометрические, численно реализуемые методом наименьших квадратов [6, 8], градиентный метод [5, 7], трехуровневый метод [1], Min-Max и Min-Var алгоритмы [2, 3, 5]. Геометрические методы вычислительно неустойчивы, градиентный - плохо аппроксимирует негладкий контур, которым является контур объема движения [5]. Помимо этого, при использовании геометрических и градиентных методов  $f(\psi, \phi, \vartheta)$  не имеет четко выраженного локального минимума в окрестностях нуля.

В данной работе предлагается подход по аппроксимации контура объема движения, использующий трехуровневый метод, и исследование ряда факторов, влияющих на точность решения этой задачи. Выбор трехуровневого метода обусловлен тем, что за счет введения ленточной поверхности, локальный минимум  $f(\psi, \phi, \vartheta)$  выражен более явно. Использование Min-Max и Min-Var методов, являющихся развитием трехуровневого метода, на текущем этапе нецелесообразно, т.к. их преимущества проявляются только в сильно зашумленных исходных данных.

### Постановка эксперимента

На кисть испытуемого закрепляется пластина, препятствующая сгибанию пясти и пальцев. На пластине жестко закрепляется микромеханический блок инерциальных измерений, подключаемый к компьютеру по USB порту. Предплечье фиксируется на устойчивой ровной горизонтальной поверхности (край стола), что позволяет

рассматривать движение сустава как вращательное. Схема эксперимента представлена на рис. 2.

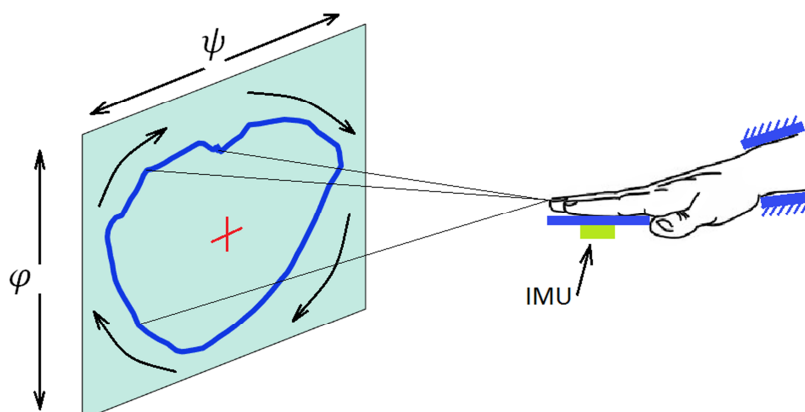


Рис. 2. Схема эксперимента

Испытуемый совершает кистью вращательное движение с небольшой скоростью, стараясь в каждый момент времени отклонить кисть на максимально возможный угол от предварительно определенного нейтрального положения [9]. Набор исходных данных  $Z^N = \{\psi, \varphi\}$  формируется из вычисленных относительно нейтрального положения углов  $\psi$  и  $\varphi$ . Значения углов определяются решением задачи ориентации по показаниям блока инерциальных измерений.

### Задача аппроксимации замкнутого контура трехуровневым методом

Задача аппроксимации замкнутого контура состоит в определении коэффициентов полиномиальной функции  $f(\psi, \varphi, \vartheta)$  по исходному набору данных. Для решения этой задачи сначала формируется вектор коэффициентов  $\vartheta$  и вектора  $\mathbf{m}$  из значений аргументов в соответствующих степенях для каждой  $k$ -той точки исходных данных. Затем формируется сама полиномиальная функция  $\mathbf{f}(\psi, \varphi, \vartheta)$  требуемого порядка  $n$ . Например, для полиномиальной функции второго порядка  $\vartheta$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{f}(\psi, \varphi, \vartheta)$  имеют следующий вид:

$$\vartheta = [\vartheta_{22}, \vartheta_{12}, \vartheta_{02}, \vartheta_{21}, \vartheta_{20}, \vartheta_{11}, \vartheta_{01}, \vartheta_{10}, \vartheta_{00}]$$

$$\mathbf{m}^k = [\psi_k^2 \varphi_k^2, \psi_k \varphi_k^2, \varphi_k^2, \psi_k^2 \varphi_k, \psi_k^2, \psi_k \varphi_k, \varphi_k, \psi_k, 1]$$

$$f_k(\psi_k, \varphi_k, \vartheta) = \mathbf{m}^k \vartheta$$

$$= \vartheta_{22} \psi_k^2 \varphi_k^2 + \vartheta_{12} \psi_k \varphi_k^2 + \vartheta_{02} \varphi_k^2 + \vartheta_{21} \psi_k^2 \varphi_k$$

$$= +\vartheta_{20} \psi_k^2 + \vartheta_{11} \psi_k \varphi_k + \vartheta_{01} \varphi_k + \vartheta_{10} \psi_k + \vartheta_{00}$$

Оценка параметров  $\vartheta$  определяется путем решения задачи минимизации:

$$\hat{\vartheta} = \operatorname{argmin}_{\vartheta \in \Theta} \|\mathbf{f}(\psi, \varphi, \vartheta)\|^2 = \operatorname{argmin}_{\vartheta \in \Theta} \sum_{\{\psi, \varphi\} \in \Gamma_0} (\mathbf{m}^k \vartheta)^2,$$

где  $\Theta$  – множество допустимых значений элементов вектора  $\vartheta$ . Стоит отметить, что значения углов  $\psi$  и  $\varphi$  могут входить в полиномиальную функцию с большими порядками, что может осложнить решение задачи минимизации. Поэтому значения  $\psi$  и  $\varphi$  предварительно одновременно масштабируются в диапазон  $[-1; 1]$ .

Отличительной особенностью трехуровневого метода является использование двух дополнительных контуров: внутреннего  $\Gamma_{-c}$  и внешнего  $\Gamma_{+c}$ , которые вместе с исходным контуром  $\Gamma_0$  формируют ленточную поверхность, представленную на рис. 3. С использованием ленточной поверхности направление поиска локального минимума однозначно определено, следовательно, задача минимизации имеет более ярко выраженный локальный минимум.

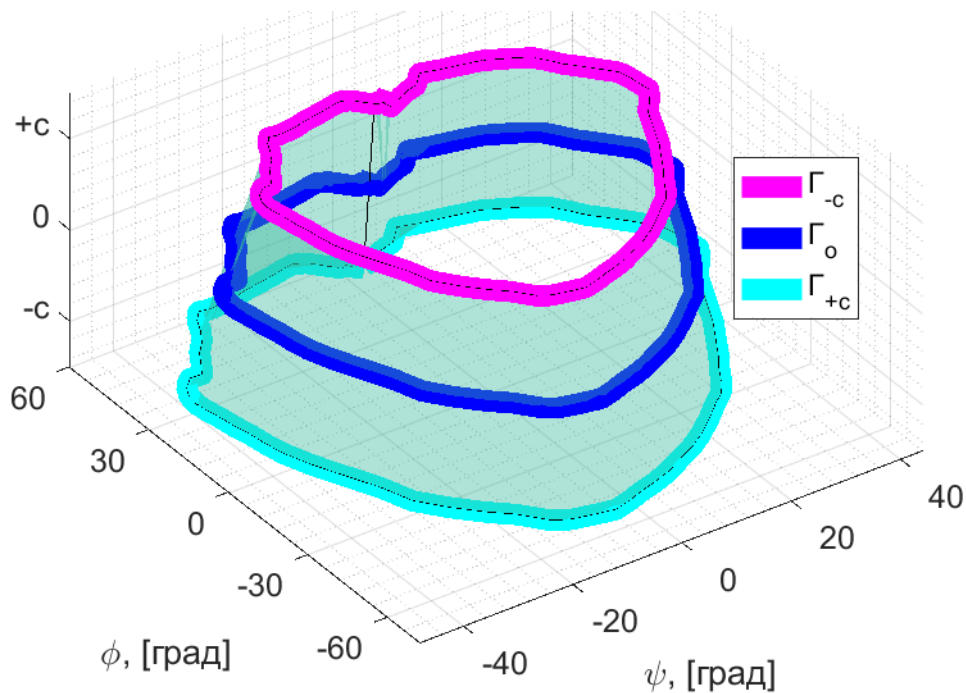


Рис.3. Ленточная поверхность

Оценка параметров  $\hat{\vartheta}$  определяется следующим образом:

$$\hat{\vartheta} = \operatorname{argmin}_{\vartheta \in \Theta} \sum (\mathbf{m}^i \vartheta - b_i)^2, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ +c \end{bmatrix}, \quad M_{3L} = \begin{bmatrix} M_{\Gamma_{-c}} \\ M_{\Gamma_0} \\ M_{\Gamma_{+c}} \end{bmatrix},$$

где  $\mathbf{m}^i$  – вектор значений аргументов  $i$ -той точки из всех трех контуров (строка матрицы  $M_{3L}$ ),  $b_i$  – элемент вектора  $\mathbf{b}$  формирующего наклон ленточной поверхности ( $c = \text{const}$ ).

Очевидно, что решение задачи должно «привязываться» к точкам исходного контура. Привязка решения задачи к базису, непосредственно связанному с исходным контуром, может быть осуществлена с помощью опорных точек, являющихся точками исходного контура, через которые аппроксимированный контур должен обязательно пройти, [1, 4]. Математически это реализуется в виде добавления к решению задачи оптимизации ограничения:

$$h_j(\vartheta) = \mathbf{w}^j \vartheta = 0,$$

где  $\mathbf{w}^j$  – вектор значений аргументов  $j$ -той опорной точки. Выбор опорных точек может быть различным. Для того, чтобы наиболее точно аппроксимировать общий характер контура, в качестве опорных выбраны десять точек, которые принадлежат исходному контуру и лежат на наиболее длинных гладких участках. Стоит отметить, что выбор опорных точек не является единственно возможным и требует дополнительного исследования.

### Алгоритм построения контура

Для построения полученного в результате аппроксимации контура необходимо по  $f(\psi, \phi, \vartheta)$  вычислить набор точек  $\{\Psi, \Phi\}$ , соответствующий контур  $\Gamma_A$ . Каждую из этих точек можно найти как пересечение  $f(\psi, \phi, \vartheta)$  с отрезком на ленточной поверхности, соединяющим соответствующую пару точек из контуров  $\Gamma_{-c}$  и  $\Gamma_{+c}$ , что можно реализовать с помощью решения задачи минимизации, где искомыми величинами являются координаты  $\{\hat{\psi}, \hat{\phi}\}$  с учетом ранее определенного вектора  $\vartheta$ :

$$\{\hat{\psi}, \hat{\phi}\} = \operatorname{argmin}_{\{\psi, \phi\} \in PQ} \sum_{q=1}^3 (\mathbf{m}^q \vartheta - b_i)^2, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ +c \end{bmatrix},$$

где  $PQ$  - отрезок на ленточной поверхности, соединяющий пару соответствующих точек контуров  $\Gamma_{-c}$  и  $\Gamma_{+c}$ , вектора  $m^1$  и  $m^3$  вычисляются для точек  $P$  и  $Q$  соответственно, а  $m^2$  вычисляется для  $\{\psi, \phi\}$ , подбираемых алгоритмом оптимизации. Решение этой задачи

возможно при условии, что контура  $\Gamma_{-c}$  и  $\Gamma_{+c}$  состоят из такого же количества точек, что и исходный контур  $\Gamma_0$ , и получены масштабированием из исходного контура  $\Gamma_0$ .

### Результаты

Результаты аппроксимации для различных значений  $n = \{4, 8, 16\}$  без использования опорных точек представлены на рис. 4, с использованием опорных точек на рис. 5.

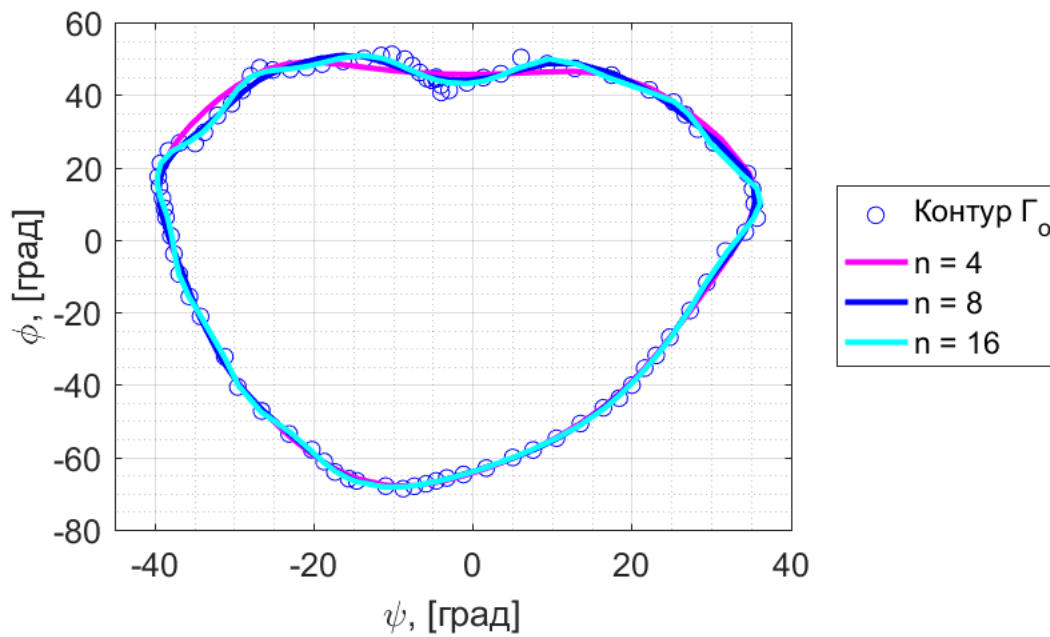


Рис. 4. Аппроксимация при различных значениях  $n$  без использования опорных точек

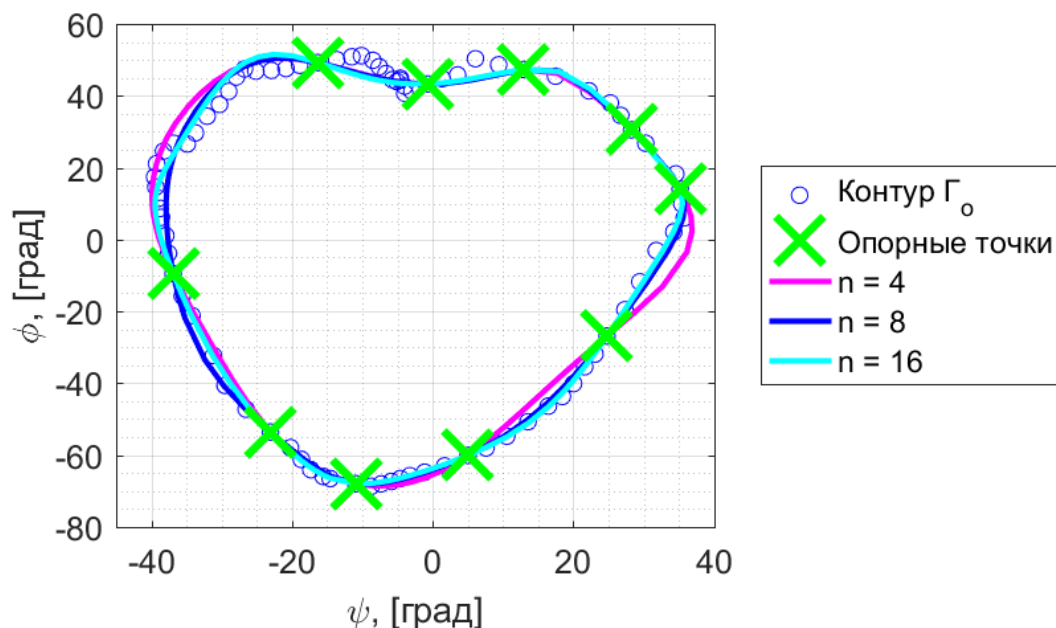


Рис. 5. Аппроксимация при различных значениях  $n$  с использованием опорных точек

### Оценка точности аппроксимации

Оценить точность аппроксимации можно по величине отклонения аппроксимируемого контура  $\Gamma_A$  от исходного контура  $\Gamma_0$ , что численно может быть реализовано с использованием среднеквадратичного критерия:

$$e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\{\psi_i, \varphi_i\}_A - \{\psi_i, \varphi_i\}_0|^2},$$

где  $\{\psi_i, \varphi_i\}_A$  -  $i$ -тая точка аппроксимированного контура,  $\{\psi_i, \varphi_i\}_0$  -  $i$ -тая точка исходного контура,  $|\{\psi_i, \varphi_i\}_A - \{\psi_i, \varphi_i\}_0|$  - расстояние между ними. Для полученных на рис. 4 и 5 контуров точность аппроксимации, определенная указанным выше методом, проиллюстрирована на рис. 6.

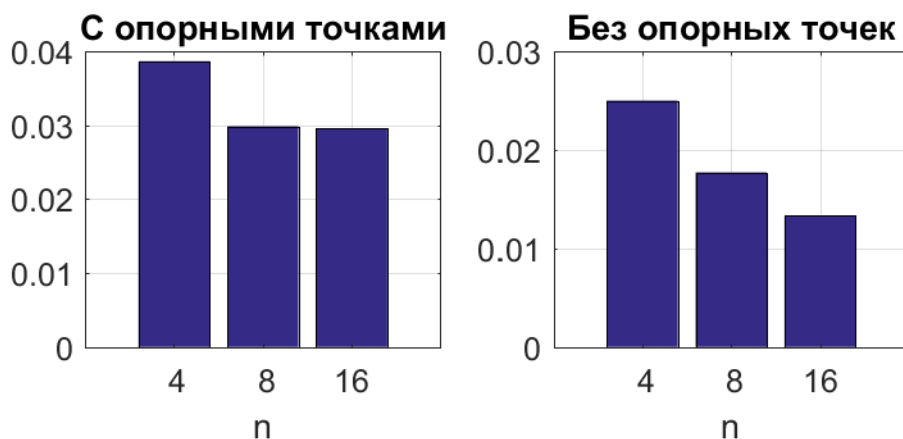


Рис. 6. Оценка точности аппроксимации

По полученным данным большая точность аппроксимации наблюдается у контуров, полученных без использования опорных точек. Однако, в случае менее гладкого контура, использование опорных точек, наоборот, может помочь получить более точную аппроксимацию.

### Выводы

В работе предложен подход по аппроксимации контура объема движения лучезапястного сустава полиномиальной функцией с использованием трехуровневого метода аппроксимации с добавлением опорных точек, лежащих на наиболее длинных гладких участках исходного контура. Дополнительно предложен простой алгоритм вычисления точек аппроксимированного контура и критерий оценки точности аппроксимации с использованием среднеквадратичного критерия по расстояниям между точками исходного и аппроксимированного контуров.

### Список литературы

- [1]. Blane M.M., Lei Z., Civi H., Cooper D.B. The 3L Algorithm for Fitting Implicit Polynomial Curves and Surfaces to Data. // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2000. Vol. 22, No. 3. P. 298–313.
- [2]. Helzer A., Barzohar M., Malah D. Robust Fitting of 2D Curves and 3D Surfaces by Implicit Polynomials // Technical Report. Technion IIT, Department of Electrical Engineering, 2002. 32 p.
- [3]. Helzer A., Barzohar M., Malah D. Stable Fitting of 2D Curves and 3D Surfaces by Implicit Polynomials // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 26,



No. 10. 2004. P. 1283–1294.

- [4]. Keren D., Gotsman C. Fitting Curves and Surfaces with Constrained Implicit Polynomials. // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1999. Vol. 21, No. 1. P. 31–41.
- [5]. Landa Z., Malah D., Barzohar M. 2D object description and recognition based on contour matching by implicit polynomials // 18th European Signal Processing Conference. IEEE, 2010. P. 1796-1800.
- [6]. Sullivan S., Sandford L., Ponce J. Using geometric distance fits for 3-D object modeling and recognition // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 16, No. 12, December 1994, pp. 1183–1196.
- [7]. Tasdized T., Tarel J.-P., Cooper D.B. Improving the stability of algebraic curves for applications // IEEE Transactions on Image Processing. 2000. Vol. 9, No. 3. P. 405–416.
- [8]. Taubin G. Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 13, No. 11. 1991. P. 1115–1138.
- [9]. Щербак О.Ю., Масленников А.Л. Определение максимальных частот движения и нейтрального положения лучезапястного сустава // Молодежный научно-технический вестник. 2016. № 9. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/849282.html> (дата обращения 13.05.2016).