электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

 # 07, июль 2017

УДК 539.51 + 629.786

Материалы и их массовая эффективность

***Пилипчук С.В.**, студент*
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана,
кафедра «Аэрокосмические системы»

Научный руководитель: Журавлев Е.И., к.т.н., доцент,
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана,
кафедра «Аэрокосмические системы»
bauman@bmstu.ru

Одним из основных критериев оценки качества разрабатываемого летательного аппарата является его масса. Как известно, любой летательный аппарат представляет собой совокупность материалов, которые образуют систему, называемую конструкцией. Для создания оптимальных по массе конструкций целесообразно иметь ориентиры, позволяющие получать сравнительную оценку материалов, используемых для создания любой машины, в частности, летательных аппаратов.

Известно, что для простых случаев нагружения любой машины плата массой за деформацию конструкции определяется величиной E (модуль упругости первого рода материала), деленной на ρ (плотность материала), что легко подтверждается следующими рассуждениями:

Рассмотрим стержень, с длиной L, изготовленный из материала с механическими характеристиками ρ и E. Предположим, что стержень растянут продольной силой P, приложенной на одном конце и жестко закреплен на другом. Нагруженный таким образом стержень упруго деформируется, приобретая удлинение ΔL.

Согласно закону Гука [3, с.44], механическое напряжение σ в поперечном сечении стержня, определяется формулой:

$$\sigma = \mathrm{E} \cdot \varepsilon = \mathrm{E} \cdot \frac{\Delta L}{L},$$

где ε - относительная деформация стержня.

Продольное растягивающее усилие в стержне определяется выражением:

$$P = \sigma \cdot F = F \cdot E \cdot \frac{\Delta L}{L},$$

где F - площадь поперечного сечения стержня.

Умножим обе части полученного равенства на $L \cdot \rho$:

$$L \cdot \rho \cdot P = \varepsilon \cdot E \cdot L \cdot \rho \cdot F$$

Представим это тождество в следующем виде:

$$L \cdot \rho \cdot P = \varepsilon \cdot E \cdot m,$$

где $m = L \cdot \rho \cdot F$ - масса стержня.

Выразим P через m:

$$P = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot m}{L \cdot \rho}.$$

Рассмотрим два стержня одинаковой длины L, с геометрически подобными сечениями, изготовленные из разных материалов с механическими характеристиками ρ_1, E_1 и ρ_2, E_2. Примем жесткости стержней при работе на растяжение равными и сравним их массы. Равенство жесткостей означает, что под действием растягивающей осевой силы P стержни удлиняются на одну и ту же величину ΔL. Приравняем продольные осевые силы и относительные деформации в стержнях:

$$P_1 = P_2.$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Используя полученную зависимость $P(m)$, запишем соотношение:

$$\frac{\varepsilon_1 \cdot E_1 \cdot m_1}{\rho_1} = \frac{\varepsilon_2 \cdot E_2 \cdot m_2}{\rho_2}.$$

Выразим из данного равенства отношение масс стержней:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{E_2/\rho_2}{E_1/\rho_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Здесь $\alpha = E/\rho$ - относительная массовая эффективность материала, так же называемая удельным модулем Юнга. Эта величина позволяет определить отношение масс конструкций с одинаковой жесткостью на растяжение, изготовленных из разных материалов. Относительная массовая эффективность материала, определяет, так сказать, массовую «стоимость» жесткости конструкции. Здесь под массовой стоимостью понимается «плата» массой силового элемента за разрушающую или критическую нагрузку. Аналогичные выкладки можно проделать для всех простых случаев нагружения силового элемента (растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг), а также для произвольной комбинации этих видов нагружения.

Оказывается, что для большинства конструкционных материалов: стали, титана, алюминия, магния, стекла и даже дерева - отношение E/ρ приблизительно одинаково, то есть материалы природного происхождения с точки зрения платы массой за жесткость конструкции примерно одинаковые. Этот факт потребовал создания синтетических материалов, которые назвали композитами. Материалы этого типа эффективны в авиакосмической промышленности, но они дороги, требуют больших затрат энергии и времени для своего производства. По этой причине их применение, должно быть необходимо и обосновано.

Если традиционные материалы во всех случаях нагружения, не вызывающих потерю статической устойчивости, имеют практически одинаковую относительную массовую эффективность, то при оценке потребной жесткости для увеличения критической нагрузки при потере устойчивости картина совершенно иная. Это определяется тем, что относительная массовая эффективность материала при работе стержня на устойчивость оценивается как $\frac{\sqrt{E}}{\rho}$, а массовая эффективность сжатой панели как $\frac{\sqrt[3]{E}}{\rho}$, что подтверждается следующими примерами:

Для стержня: Критическая сжимающая осевая сила $P_{\text{кр}}$, приводящая к потере устойчивости стержня, вычисляется по формуле Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot J_{min}}{\mu^2 \cdot L^2},$$

где J_{min}- минимальный геометрический момент инерции сечения стержня, μ - коэффициент приведения длины, зависящий от условий закрепления стержня.

Рассмотрим стержень с круглым поперечным сечением, для которого

$$J_{min} = J = \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

Здесь d - диаметр кругового сечения стержня.

Масса стержня определяется следующим образом:

$$m = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \rho \cdot L.$$

Возведем в квадрат обе части равенства и разрешим его относительно d^4:

$$d^4 = \frac{16 \cdot m^2}{\pi^2 \cdot \rho^2 \cdot L^2}.$$

Выразим геометрический момент инерции поперечного сечения стержня через его массу:

$$J = \frac{m^2}{4 \cdot \pi \cdot \rho^2 \cdot L^2}.$$

Подставим полученную зависимость в формулу Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{E \cdot m^2}{\mu^2 \cdot \rho^2 \cdot L^4}.$$

Рассмотрим два стержня, изготовленные из разных материалов, имеющие круговые сечения, равные длины L и одинаковые условия закрепления. Примем критические нагрузки стержней одинаковыми и найдем отношение их масс:

$$P_{\text{кр}1} = P_{\text{кр}2}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{E_1 \cdot {m_1}^2}{\mu^2 \cdot {\rho_1}^2 \cdot L^4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{E_2 \cdot {m_2}^2}{\mu^2 \cdot {\rho_2}^2 \cdot L^4}.$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{E_2}/\rho_2}{\sqrt{E_1}/\rho_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1},$$

где $\beta = \frac{\sqrt{E}}{\rho}$ - относительная массовая эффективность материала при работе стержня на устойчивость. Эта величина позволяет определить отношение масс стержней, изготовленных из разных материалов и теряющих статическую устойчивость при одинаковой критической нагрузке. Так же этот критерий подходит для оценки массовой эффективности материала оболочки, теряющей устойчивость под действием наружного давления [2, с.180].

Для панели: Согласно [2, с.92], для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру и нагруженной сосредоточенными силами, критическое усилие, соответствующее потере статической устойчивости, определяется по формуле:

$$P_{\text{кр}} = K \cdot \frac{\pi \cdot D}{b},$$

где K - коэффициент, зависящий от соотношения длины и ширины пластины, a - длина пластины, b - ширина пластины, h - толщина пластины, $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}$ - цилиндрическая жесткость пластины, ν - коэффициент Пуассона. Выражение для расчета массы пластины:

$$m = a \cdot b \cdot \rho \cdot h.$$

Преобразуем это равенство следующим образом:

$$h = \frac{m}{a \cdot b \cdot \rho}.$$

Рассмотрим две прямоугольные пластины с одинаковыми длинами диагоналей, изготовленные из разных материалов. Сравним массы этих пластин при условии, что критические нагрузки, вызывающие потерю статической устойчивости, равны:

$$P_{\text{кр}1} = P_{\text{кр}2} \Rightarrow D_1 = D_2$$

$$\frac{E_1 \cdot {h_1}^3}{12 \cdot (1 - {\nu_1}^2)} = \frac{E_2 \cdot {h_2}^3}{12 \cdot (1 - {\nu_2}^2)}.$$

$$\frac{E_1 \cdot {m_1}^3}{12 \cdot (1 - {\nu_1}^2) \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot {\rho_1}^3} = \frac{E_2 \cdot {m_2}^3}{12 \cdot (1 - {\nu_2}^2) \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot {\rho_2}^3}.$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt[3]{E_2}}{\rho_2 \cdot \sqrt[3]{(1 - {\nu_2}^2)}} \Bigg/ \frac{\sqrt[3]{E_1}}{\rho_1 \cdot \sqrt[3]{(1 - {\nu_1}^2)}}.$$

Пренебрегая слагаемыми ${\nu_i}^2$ ввиду их малости, получаем:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt[3]{E_2}/\rho_2}{\sqrt[3]{E_1}/\rho_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

где $\gamma = \sqrt[3]{E}/\rho$ - относительная массовая эффективность материала при работе пластины на устойчивость. Эта величина позволяет определить отношение масс прямоугольных пластин с одинаковой диагональю, изготовленных из разного материала, работающих на устойчивость при одинаковой критической нагрузке. Так же, параметр γ позволяет определить массовую эффективность оболочки, работающей на сжатие.

Эти параметры сведены в таблицу 1, характеризующую массовую эффективность некоторых материалов в различных условиях эксплуатации.

Таблица 1

Сравнительные характеристики массовой эффективности конструкционных материалов

Материал	Модуль Юнга E, МН/м^2	Плотность ρ, г/см^2	$\frac{E}{\rho}$	$\frac{\sqrt{E}}{\rho}$	$\frac{\sqrt[3]{E}}{\rho}$
1	2	3	4	5	6
Сталь	210000	7,8	26950	60	7,6
Титан	120000	4,5	26700	77	11
Алюминий	72000	2,8	25700	96	15
Магний	42000	1,7	24700	120	20,5
Стекло	60000	2,4	25000	102	16,5
Углеволокнистые композиты	200000	2,0	100000	224	29
Дерево (сосна, ель)	12500	0,5	25000	224	47

Ранее было показано, что для простых случаев нагружения (растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг) и произвольной комбинации этих случаев все природные материалы имеют примерно одинаковую массовую эффективность. Что же касается устойчивости, очевидно, что с уменьшением плотности материала, его эффективность при работе конструкции на устойчивость увеличивается, в связи с чем очевидна высокая эффективность использования несущих элементов с пустотами, например, трехслойных конструкций.

Оптимальной экономической оценкой материалов, используемых для создания конструкции, является величина энергозатраты на ее производство.

В таблице 2 приведены характеристики конструкционной эффективности различных материалов, выраженные в затратах энергии необходимых для их производства, если энергозатраты на производство стали принять за единицу.

Таблица 2

Характеристики конструкционной эффективности различных материалов

Материал	Энергия, необходимая для обеспечения заданной жесткости в целом	Энергия, необходимая для изготовления сжатой панели, воспринимающей критическую нагрузку	$\frac{\beta_{\text{Стали}}}{\beta_1}$	$\frac{\gamma_{\text{Стали}}}{\gamma_1}$	Средняя цена за 1 кг трубы, руб. на 2017 г.
Сталь	1	1	1	1	60
Титан	13	9	0,78	0,69	1000
Алюминий	4	2	0,65	0,5	300
Углеволокнистые композиты	17	17	0,28	0,26	4000
Дерево	0,02	0,002	0,28	0,16	30

Из таблицы 2 видно, что традиционные материалы - сталь, алюминий - имеют подавляющее преимущество. Этот факт заставляет задуматься, действительно ли оправдана погоня за материалами, в основе которых лежат экзотические волокна? Повторим еще раз: применение дорогостоящих композитов должно быть глубоко обосновано. Из таблицы 2 так же следует, что основным материалом для создания, особенно герметичных, конструкций, неоспоримое преимущество имеет алюминий и его сплавы.

Вывод

Чем ниже плотность материала, тем он эффективнее с точки зрения устойчивости конструкции. Применение алюминиевых сплавов при производстве летательных аппаратов имеет наибольшую массовую эффективность при минимальной стоимости. Наиболее эффективно применение деталей с пустотами, таких как трехслойные конструкции.

Список литературы

[1]. Биргер И.А., Пановко Я.Г., Амбрацумян С.А., Бидерман В.Л., Болотин В.В., Вольмир А.С., Феодосьев В.И. Прочность, устойчивость, колебания: справочник. В 3-х т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 812 с.

[2]. Биргер И.А., Пановко Я.Г., Амбрацумян С.А., Бидерман В.Л., Болотин В.В., Вольмир А.С., Феодосьев В.И. Прочность, устойчивость, колебания: справочник. В 3-х т. М.: Машиностроение, 1968. 547 с.

[3]. Кац А.М. Теория упругости: 2-е изд., стереот. СПб.: Лань , 2002. 208 с.